Векторы

Вектором в пространстве называется направленный отрезок, т.е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B.

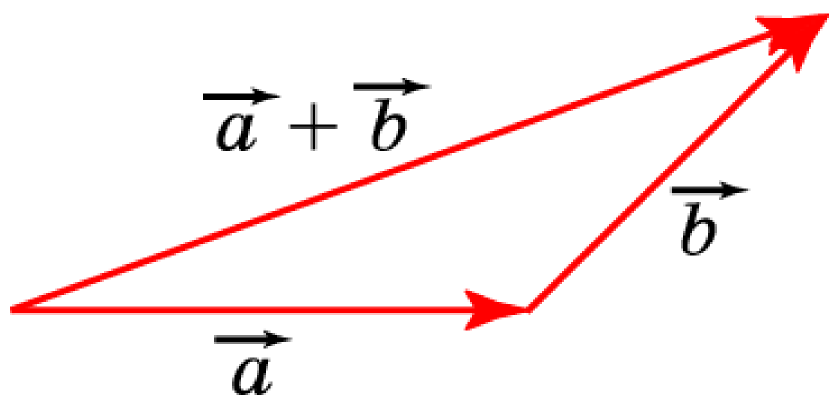
Длиной, или **модулем,** вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и направление.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

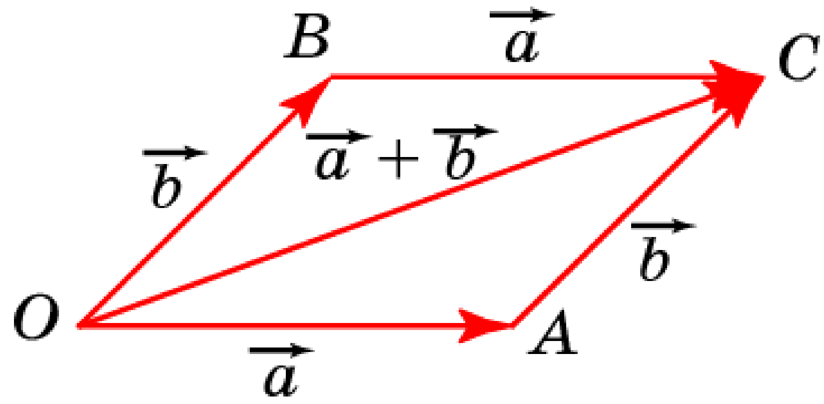
Сложение векторов

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, называется **суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

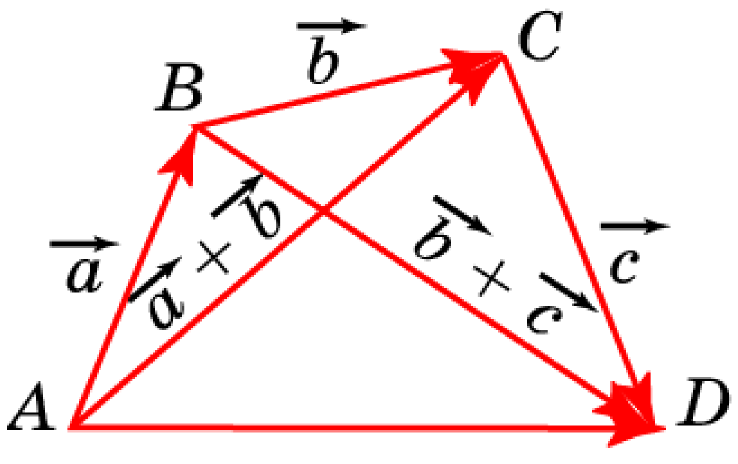


Свойства сложения векторов

Свойство 1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон).

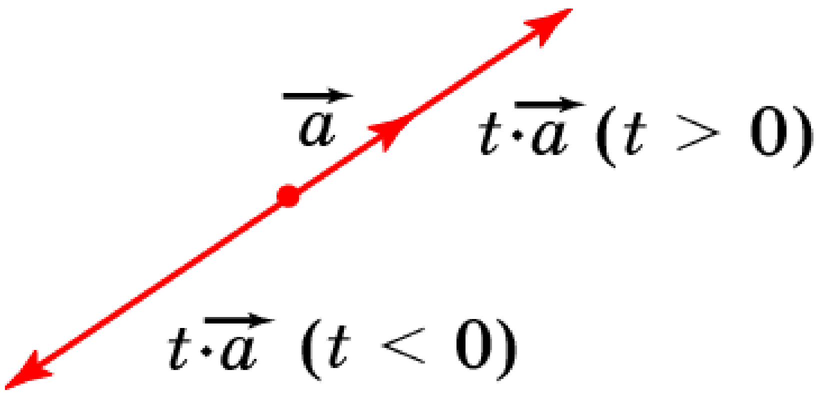


Свойство 2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон).



Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, длина которого равна $|t|\cdot|\vec{a}|$, а направление остается прежним, если $t>0$, и меняется на противоположное, если $t<0$. Произведением вектора на нуль считается нулевой вектор.



Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$. По определению, $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число -1 называется вектором, противоположным и обозначается $-\vec{a}$. По определению, вектор $-\vec{a}$ имеет направление, противоположное вектору и $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Свойства

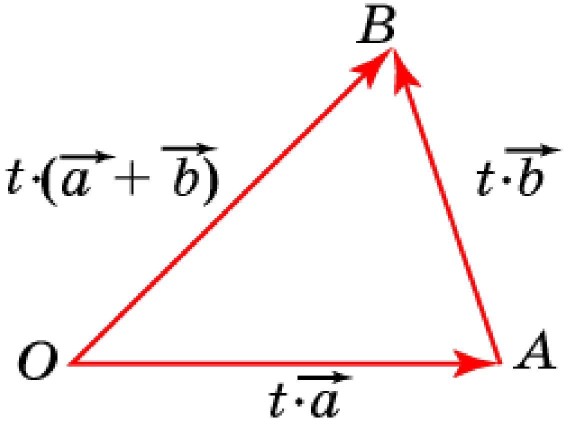
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$, который обозначается $\vec{a}-\vec{b}$.

Для умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам умножения чисел, а именно:

Свойство 1. $(ts)\vec{a}=t(s\vec{a})$ (сочетательный закон).

Свойство 2. $(t+s)\vec{a}=t\vec{a}+s\vec{a}$ (первый распределительный закон).

Свойство 3. $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$ (второй распределительный закон).



Упражнение 1

В каком случае длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

Ответ: Если векторы одинаково направлены.

Упражнение 2

Точка B - середина отрезка AC, а точка C - середина отрезка BD. Равны ли векторы:

а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$;

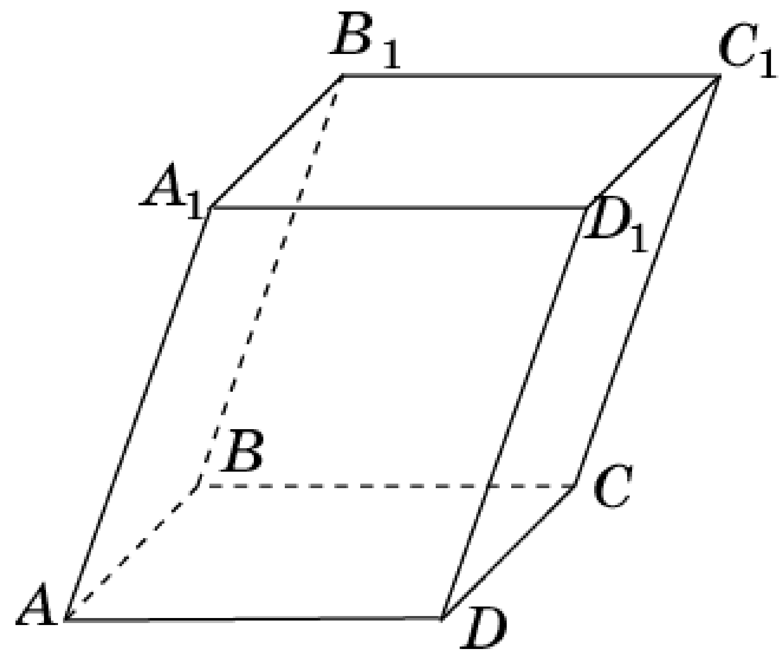
б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

Ответ: а) Да;

б) нет.

Упражнение 3

Назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов, с началом и концом в вершинах параллелепипеда $A...D_1$.



Ответ: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$.

Упражнение 4

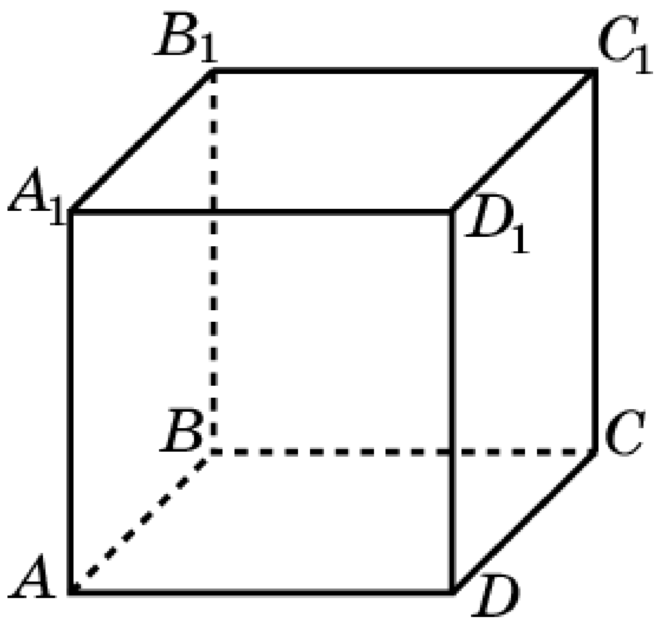
В кубе $A \ldots D_1$ назовите вектор, равный:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1}$;

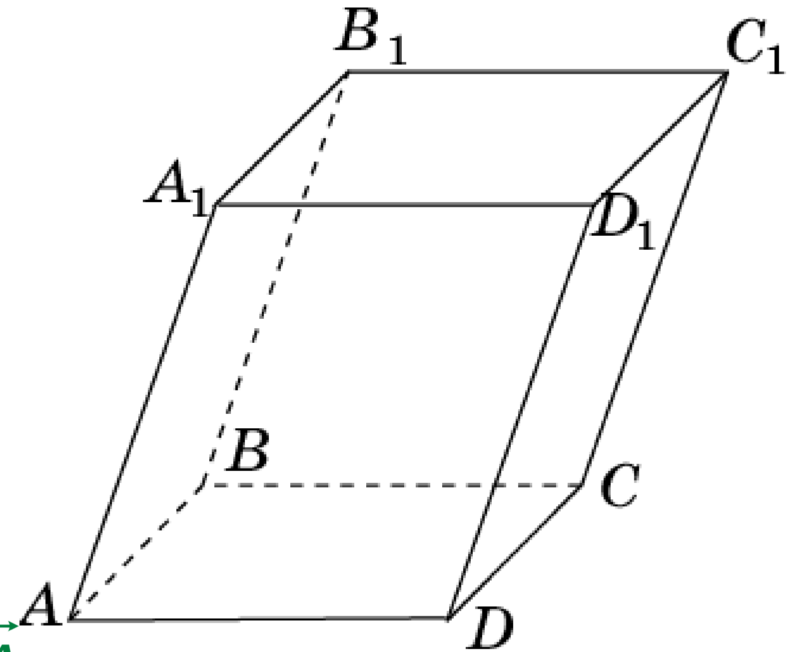
г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1D_1}$.



Ответ: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$.

Упражнение 5

Для параллелепипеда $A...D_1$ выясните, верны ли следующие утверждения:



а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_1D}$;

г) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A}$.

Ответ: а) Да; б) да; в) да; г) нет.

Упражнение 6

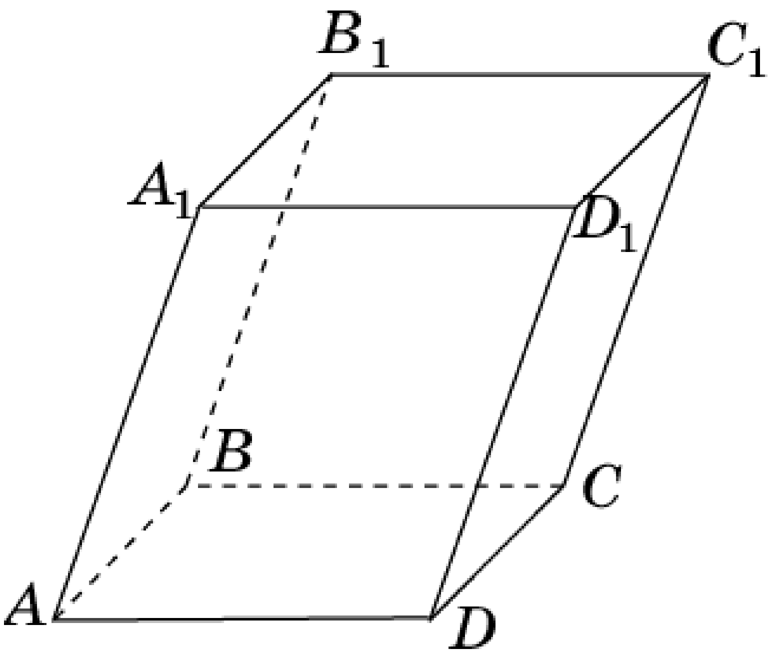
В параллелепипеде $A...D_1$ укажите векторы, равные:

а) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$;

б) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1C}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.



Ответ: а) $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{AD_1}$; в) $\vec{0}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}$.

Упражнение 7

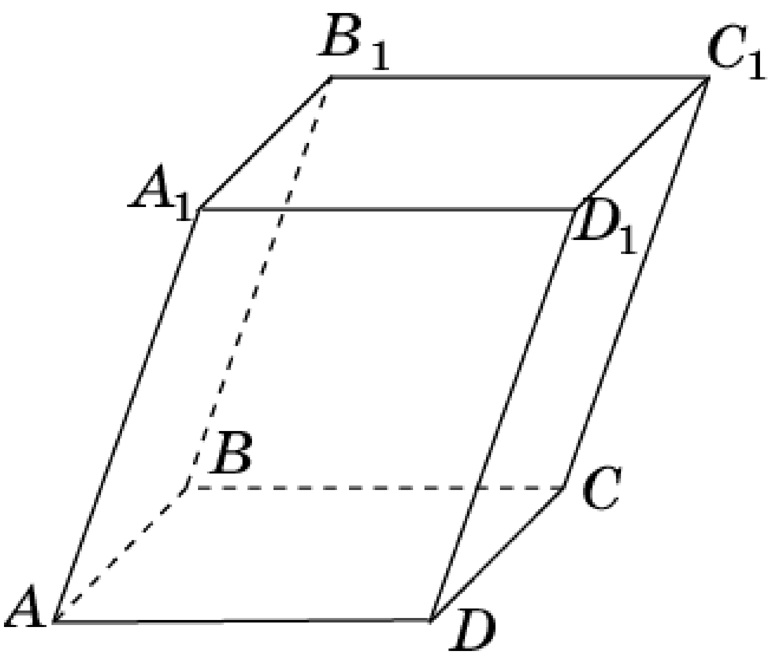
В параллелепипеде $A...D_1$ укажите векторы, равные:

а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{C_1C}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

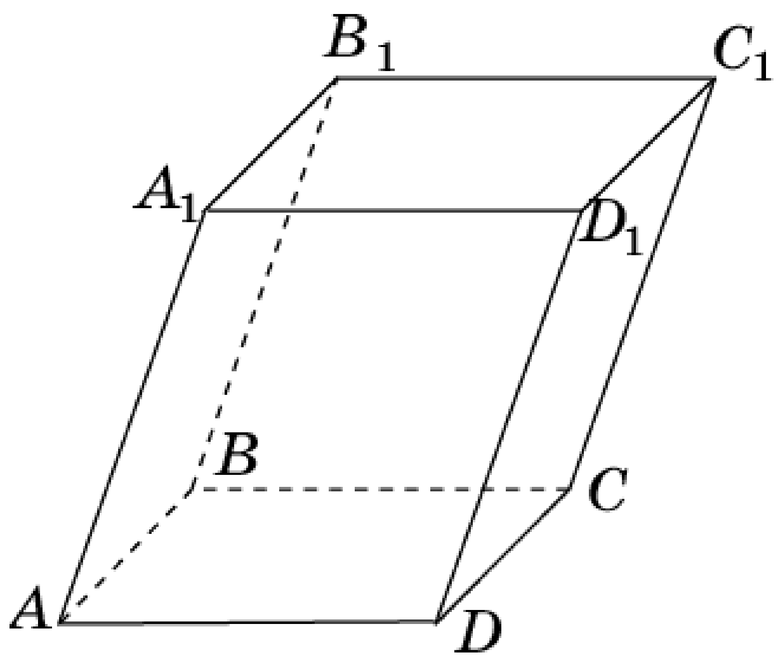


Ответ: а) $\overrightarrow{AB_1}$; б) $\overrightarrow{AD_1}$; в) $\vec{0}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}$.

Упражнение 8

$A...D_1$ - параллелепипед. Упростите выражение

$$\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A_1D_1}$$



Ответ: $\overrightarrow{B_1D}$.