

# ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

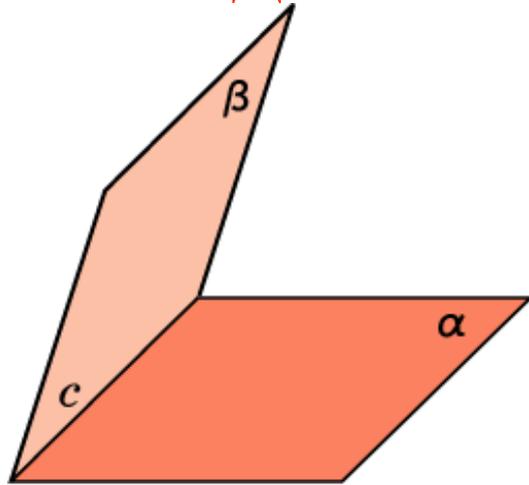


Рис. 1

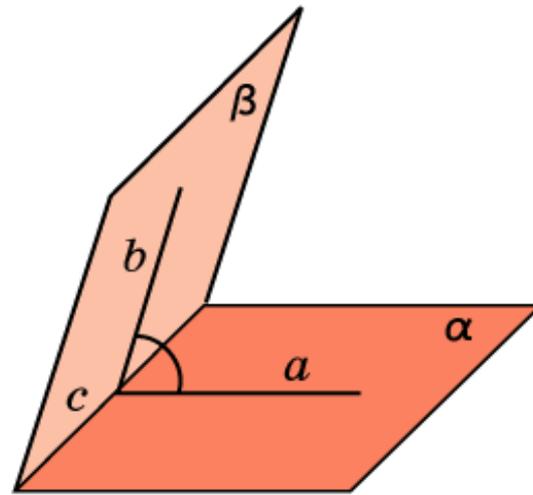


Рис. 2

Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованную двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

## Упражнение 1

Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 2

Плоскости двух равнобедренных треугольников с общим основанием образуют двугранный угол. Верно ли утверждение о том, что высоты, проведенные к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?

Ответ: Да.

## Упражнение 3

Треугольник  $MAV$  и квадрат  $ABCD$  заданы таким образом, что  $MB$  - перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями  $AMD$  и  $ABC$ ?

Ответ:  $MBC$ .

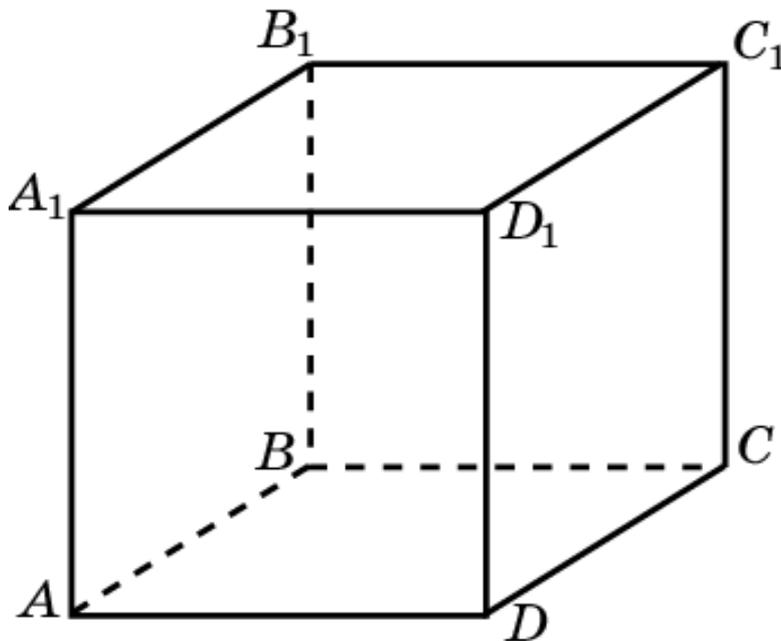
## Упражнение 4

В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.

Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 5

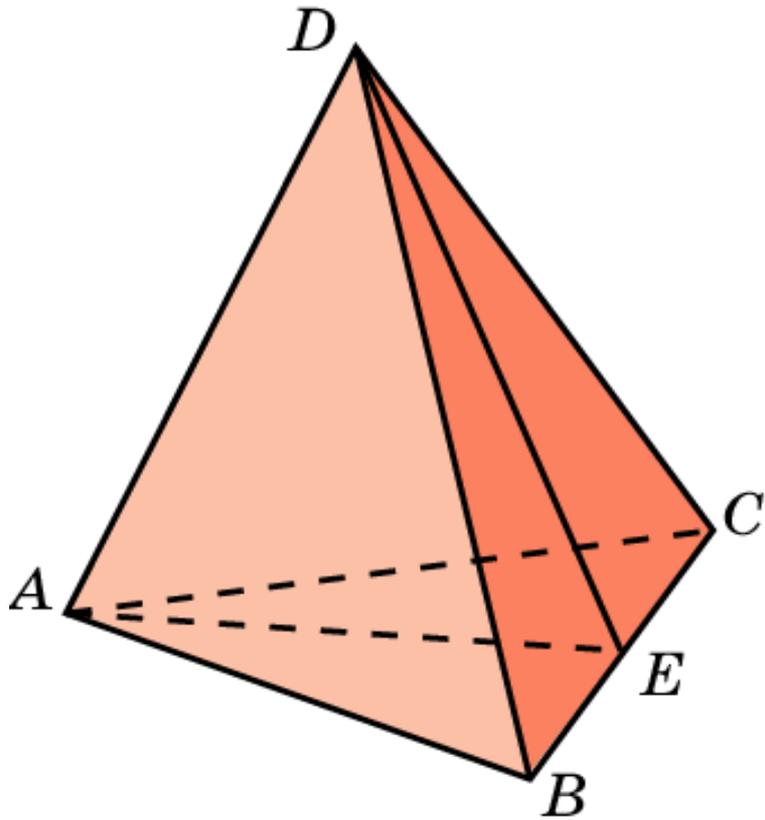
В кубе  $A...D_1$  найдите угол наклона плоскости  $ABC_1$  к плоскости  $ABC$ .



Ответ:  $45^\circ$ .

## Упражнение 6

Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.



**Решение:** Пусть  $ABCD$  – правильный тетраэдр с ребром 1. Из вершин  $A$  и  $D$  опустим перпендикуляры  $AE$  и  $DE$  на ребро  $BC$ . Угол  $AED$  будет линейным углом  $\varphi$  искомого двугранного угла. В треугольнике  $ADE$  имеем:

$$AD = 1, AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}. \text{ Откуда } \varphi \approx 70^\circ 30'.$$

**Ответ:**  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ ,  $\varphi \approx 70^\circ 30'$ .

## Упражнение 7

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

**Ответ:** Две биссектральные плоскости.

## Упражнение 8

Через сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость  $\alpha$  под углом  $30^\circ$  к плоскости треугольника. Высота  $AD$  треугольника  $ABC$  равна  $a$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  треугольника до плоскости  $\alpha$ .

Ответ:  $\frac{a}{2}$ .

## Упражнение 9

Через катет  $BC=a$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  (угол  $C$  равен  $90^\circ$ ) проведена плоскость  $\alpha$ , образующая с плоскостью треугольника угол  $30^\circ$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

Ответ:  $\frac{a}{2}$ .

## Упражнение 10

Через сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость под углом  $30^\circ$  к плоскости треугольника; угол  $C$  равен  $150^\circ$ ,  $AC = 6$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до этой плоскости.

Ответ: 1,5.

## Упражнение 11

Дан квадрат  $ABCD$ , через вершину  $D$  параллельно диагонали  $AC$  проведена плоскость  $\alpha$ , образующая с диагональю  $BD$  угол  $60^\circ$ . Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью  $\alpha$ ?

Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 12

Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) равнобедренная трапеция?

**Ответ:** а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

## Упражнение 13

В основании прямой призмы параллелограмм со сторонами 4 дм и 5 дм. Угол между ними  $30^\circ$ . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые ребра и образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ .

**Ответ:**  $10\sqrt{2}$  дм<sup>2</sup>.

## Упражнение 14

Боковое ребро прямой призмы равно 6 см. Ее основание – прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 2 см. Найдите площади сечений призмы плоскостями, проходящими через каждый из данных катетов и образующими углы  $60^\circ$  с плоскостью основания.

Ответ:  $6 \text{ см}^2$ .

## Упражнение 15

Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины двух сторон основания и образующей угол  $45^\circ$  с его плоскостью, если известно, что плоскость пересекает: а) только одно боковое ребро призмы; б) два ее боковых ребра.

**Ответ:** а)  $\sqrt{6}$ ; б)  $3\sqrt{6}$ .

## Упражнение 16

Ребро куба равно  $a$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен: а)  $30^\circ$ ; б)  $\varphi$ .

Ответ: а)  $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $\frac{a^2}{\cos \varphi}$ .

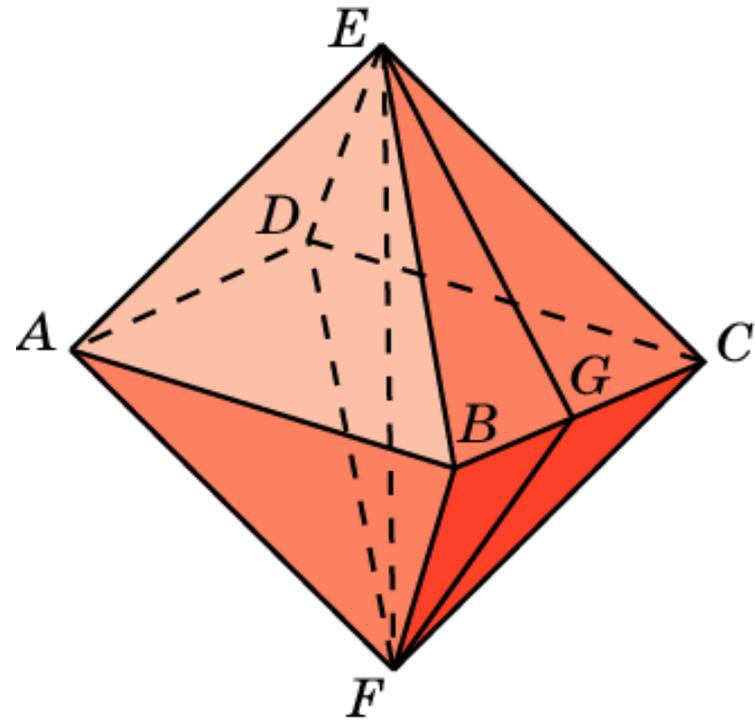
## Упражнение 17

Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол  $\varphi$  и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна  $Q$ .

Ответ:  $\sqrt{\frac{2Q \cdot \cos \varphi}{7}}$ .

## Упражнение 18

Найдите двугранные углы октаэдра.



**Решение:** Рассмотрим правильный октаэдр с ребром 1. Из вершин  $E$  и  $F$  опустим перпендикуляры  $EG$  и  $FG$  на ребро  $BC$ . Угол  $EGF$  будет линейным углом  $\varphi$  искомого двугранного угла. В треугольнике  $EGF$  имеем:

$$EF = \sqrt{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

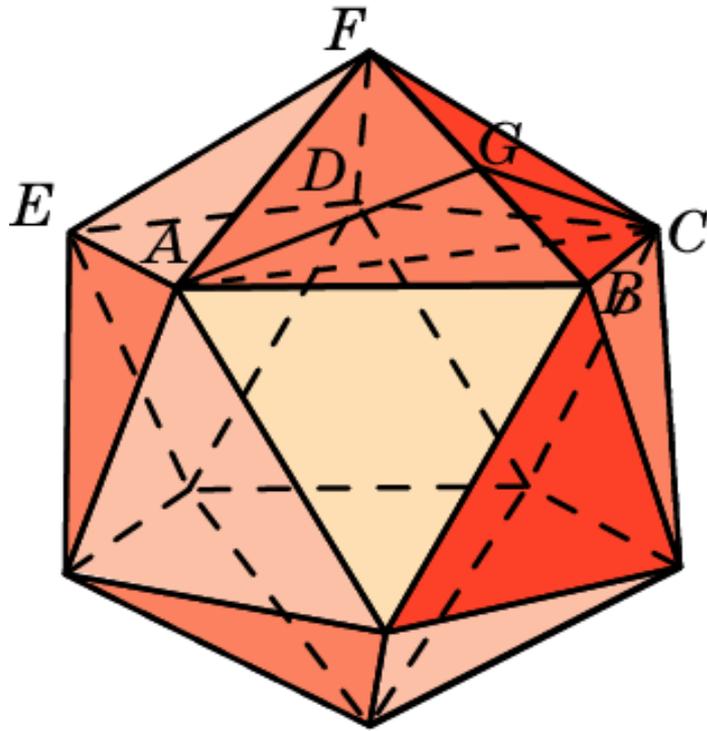
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 109^\circ 30'.$$

**Ответ:**  $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$ ,  $\varphi \approx 109^\circ 30'$ .

## Упражнение 19

Найдите двугранные углы икосаэдра.



**Решение:** Рассмотрим правильный икосаэдр с ребром 1. Из вершин  $A$  и  $C$  опустим перпендикуляры  $AG$  и  $CG$  на ребро  $BF$ . Угол  $AGC$  будет линейным углом  $\varphi$  искомого двугранного угла. В треугольнике  $AGC$  имеем:

$$AC = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

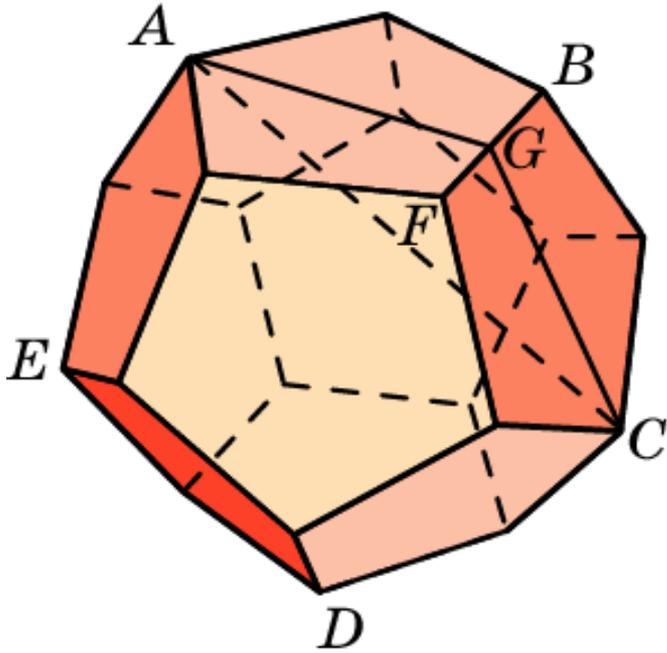
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 138^\circ 11'.$$

Ответ:  $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \varphi \approx 138^\circ 11'.$

## Упражнение 20

Найдите двугранные углы додекаэдра.



**Решение:** Рассмотрим правильный додекаэдр с ребром 1. Из вершин  $A$  и  $C$  опустим перпендикуляры  $AG$  и  $CG$  на ребро  $BF$ . Угол  $AGC$  будет линейным углом  $\varphi$  искомого двугранного угла. В треугольнике  $AGC$  имеем:

$$AC = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 5}}{2}.$$

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 116^\circ 34'.$$

Ответ:  $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \varphi \approx 116^\circ 34'.$