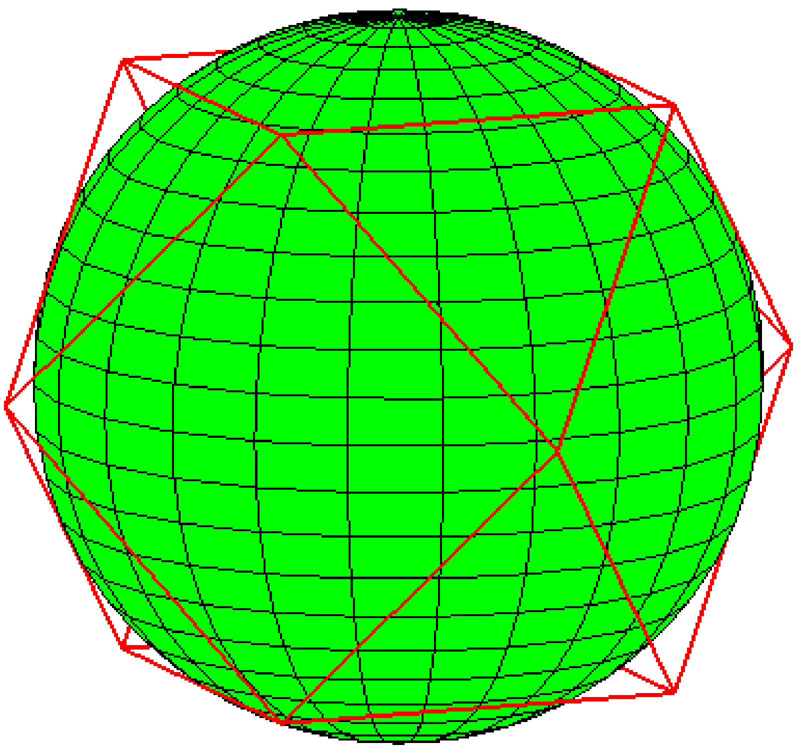
Полувписанная сфера

Сфера называется полувписанной в многогранник, если она касается всех его ребер.

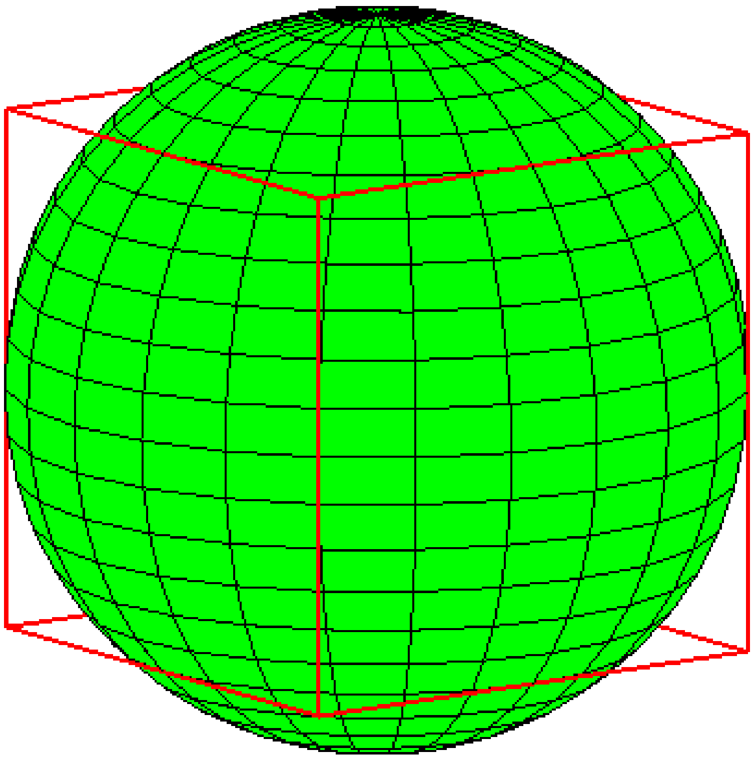
Центром полувписанной сферы является точка, равноудаленная от всех ребер многогранника



Ясно, что если у многогранника существует полувписанная сфера, то в каждую его грань можно вписать окружность. Причем, окружности, вписанные в соседние грани касаются общего ребра в одной и той же точке.

Упражнение 1

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в единичный куб

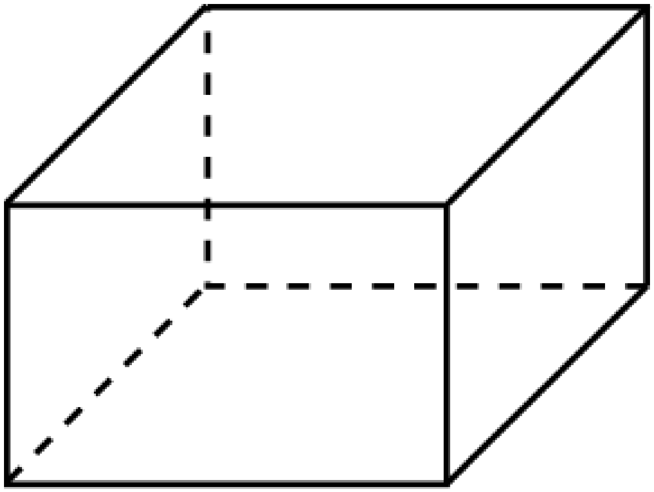


Решение. Центром полувписанной сферы будет центр O куба. Радиус R равен расстоянию от центра O до ребра куба, т.е.

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Упражнение 2

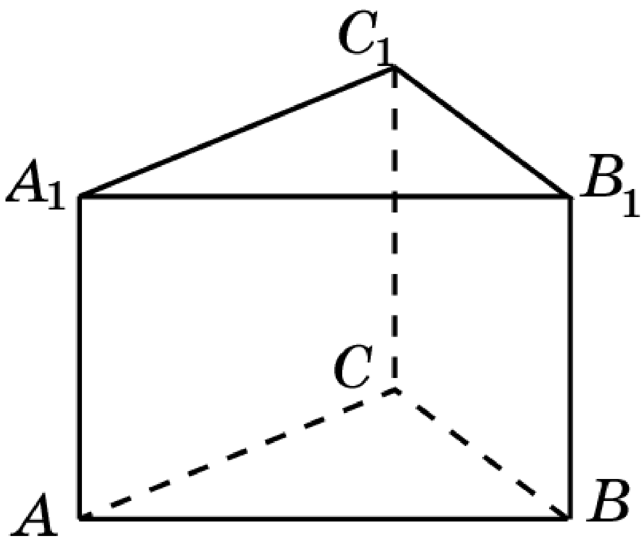
Существует ли полувписанная сфера у прямоугольного параллелепипеда?



Ответ: Существует только в случае, если прямоугольный параллелепипед - куб.

Упражнение 3

Докажите, что из треугольных призм полувписанная сфера может быть только у правильной треугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.

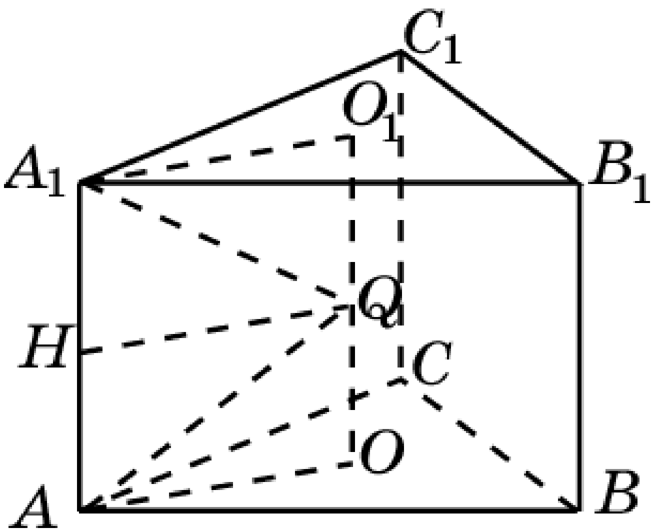


Доказательство. Если у треугольной призмы существует полувписанная сфера, то в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра перпендикулярны этим плоскостям и, значит, боковые грани – квадраты.

Таким образом, полувписанная сфера может быть только у правильной треугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.

Упражнение 4

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в правильную треугольную призму с ребрами, равными a.

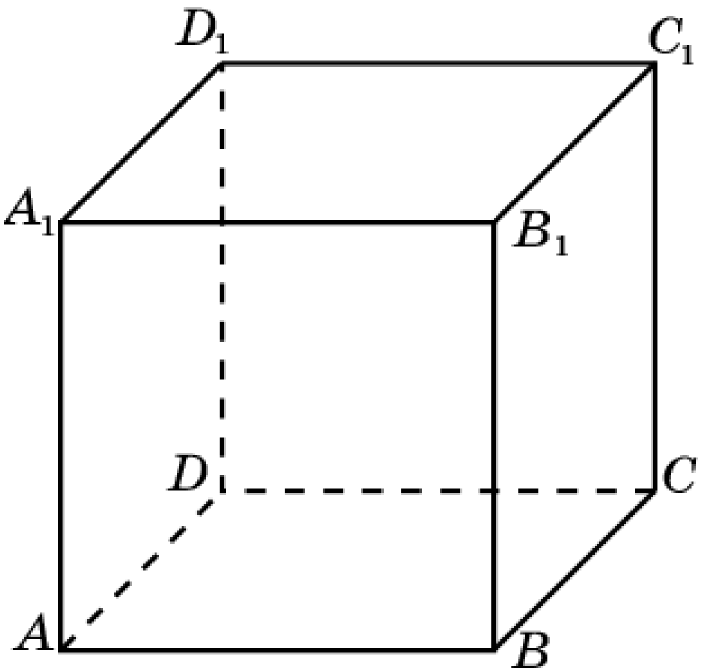


Решение. Обозначим Q середину отрезка OO_1, соединяющего центры оснований. Эта точка является центром описанной около призмы сферы. Равнобедренные треугольники с вершиной в точке Q, основаниями которых служат ребра призмы, равны и, следовательно, равны расстоянию от точки Q до этих ребер, т.е. Q является центром полувписанной сферы. В треугольнике AQA_1 высота QH равна отрезку OA и равна $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Следовательно, искомый радиус полувписанной сферы равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Упражнение 5

Докажите, что из четырехугольных призм полувписанная сфера может быть только у куба.

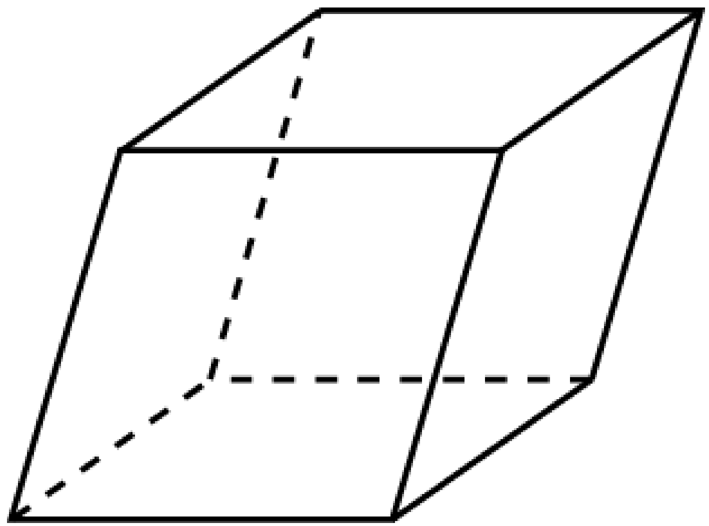


Решение. Если у четырехугольной призмы существует полувписанная сфера, то в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра, перпендикулярны основаниям и, значит, боковые грани – квадраты.

Таким образом, полувписанная сфера может быть только у правильной четырехугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания, т.е. у куба.

Упражнение 6

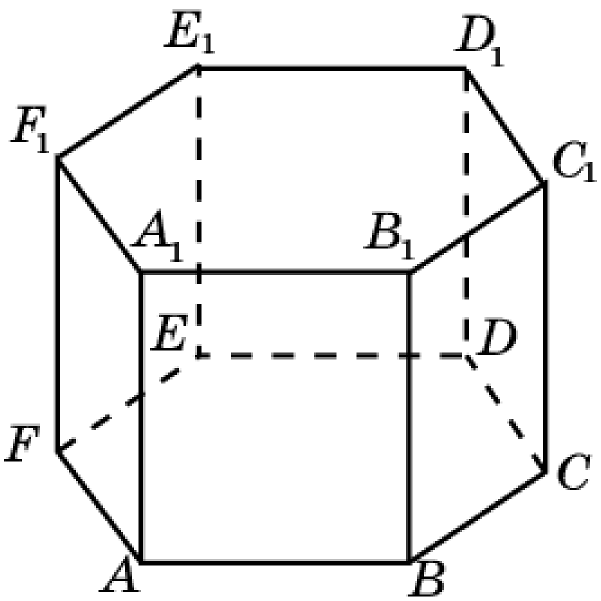
Существует ли полувписанная сфера у наклонного параллелепипеда, все грани которого ромбы?



Ответ: Нет.

Упражнение 7

Докажите, что из шестиугольных призм полувписанная сфера может быть только у правильной шестиугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.

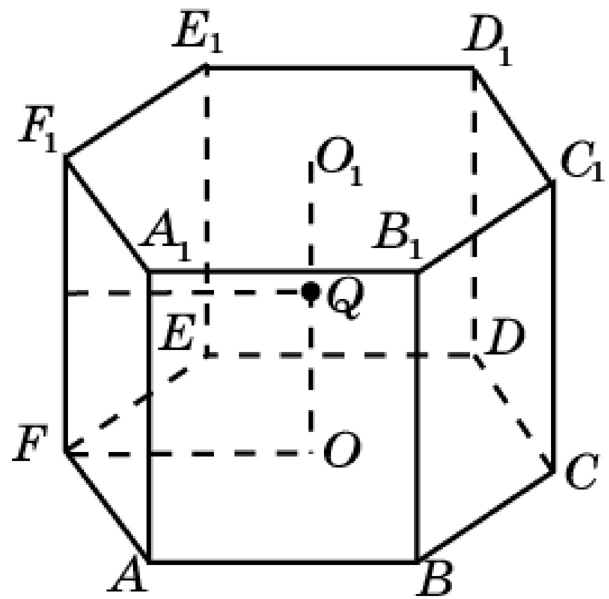


Решение. Если у шестиугольной призмы существует полувписанная сфера, то в каждую ее боковую грань можно вписать окружность и, следовательно, боковые грани – ромбы. Кроме того, так как плоскости, содержащие основания, пересекают полувписанную сферу по равным окружностям, то боковые ребра перпендикулярны этим плоскостям и, значит, боковые грани – квадраты.

Таким образом, полувписанная сфера может быть только у правильной шестиугольной призмы, у которой боковые ребра равны стороне основания.

Упражнение 8

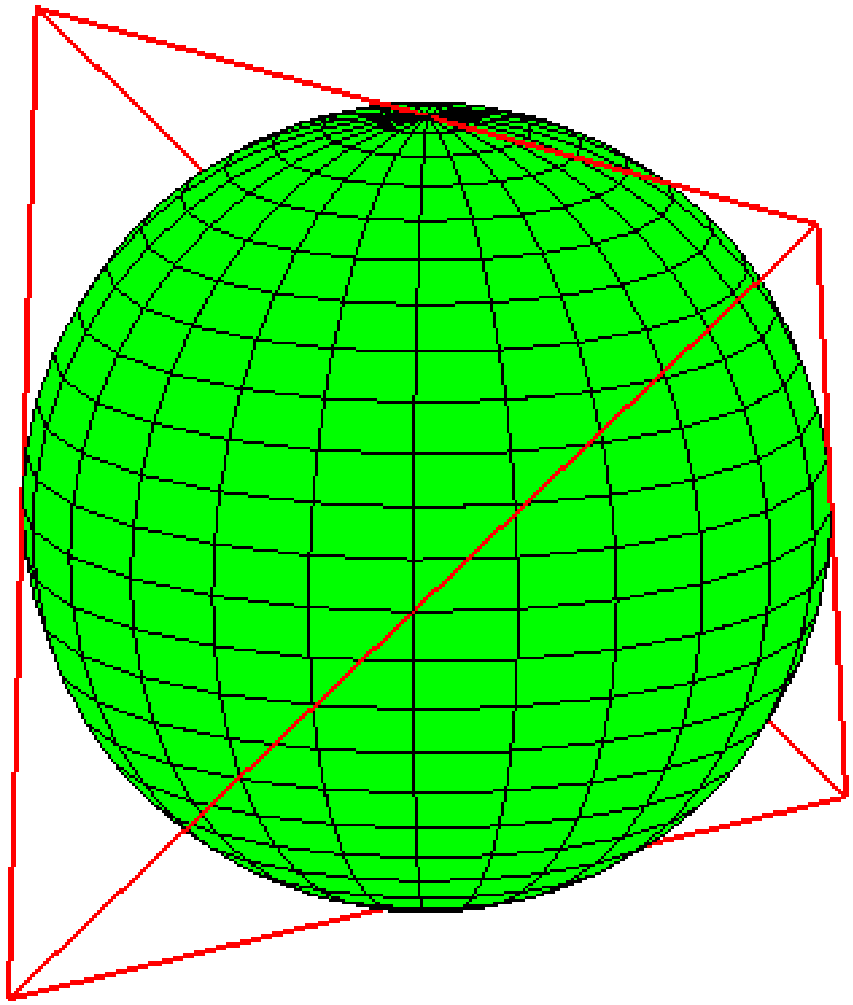
Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в правильную шестиугольную призму с ребрами, равными *a*.



Решение. Обозначим Q середину отрезка, соединяющего центры O, O_1 оснований призмы. Ясно, что расстояние от Q до ребер призмы равно a.

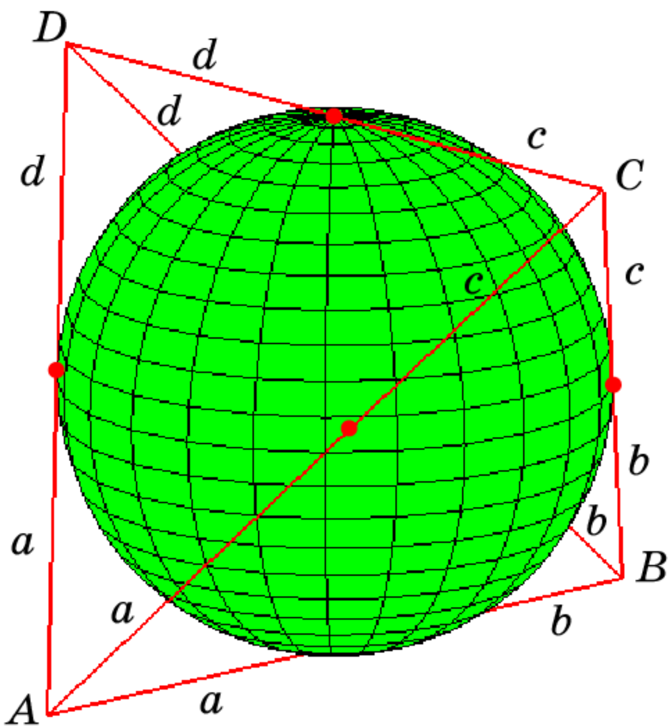
Таким образом, Q –центр, а a – радиус искомой полувписанной сферы.

Сфера, полувписанная в тетраэдр



Упражнение 1

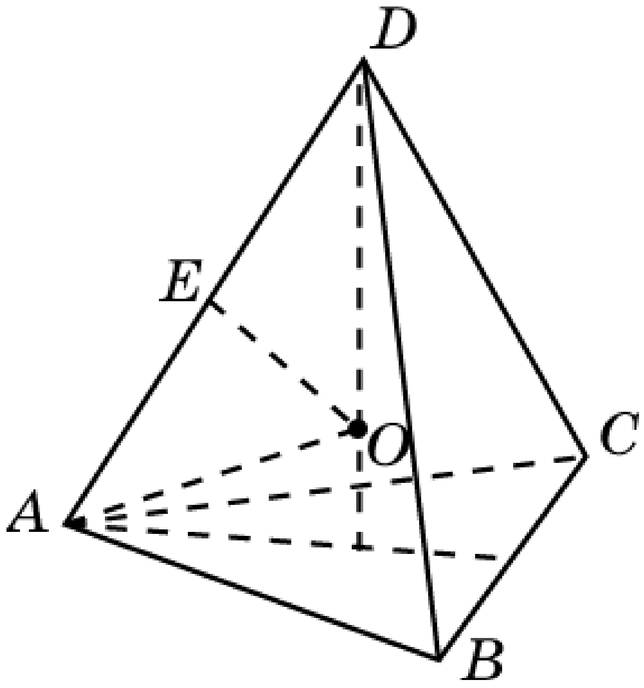
Докажите, что если у тетраэдра существует полувписанная сфера то суммы его противоположных ребер равны.



Доказательство. Пусть у тетраэдра $ABCD$ существует полувписанная сфера. Обозначим через a, b, c и d расстояния от соответствующих вершин тетраэдра до точек касания. Тогда $AB = a + b$, $CD = c + d$. Следовательно, $AB + CD = a + b + c + d$. Аналогично, $AC + BD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d$. Таким образом, суммы противоположных ребер тетраэдра равны.

Упражнение 2

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в правильный тетраэдр с ребром 1.



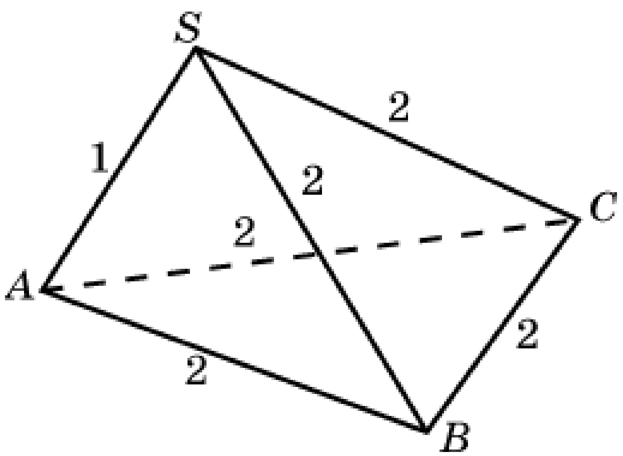
Решение. Пусть O – центр описанной сферы правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1. Воспользуемся тем, что радиус описанной сферы равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Треугольник AOD равнобедренный, $AD = 1$, $AO = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Высота OH этого треугольника равна расстоянию от точки O до ребра AD. По теореме Пифагора находим

$$OH = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{6}{16} - \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Из равенства равнобедренных треугольников с вершиной O, основаниями которых служат ребра тетраэдра, следует, что расстояния от точки O до всех ребер тетраэдра равны, т.е. точка O является центром полувписанной сферы, а ее радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Упражнение 3

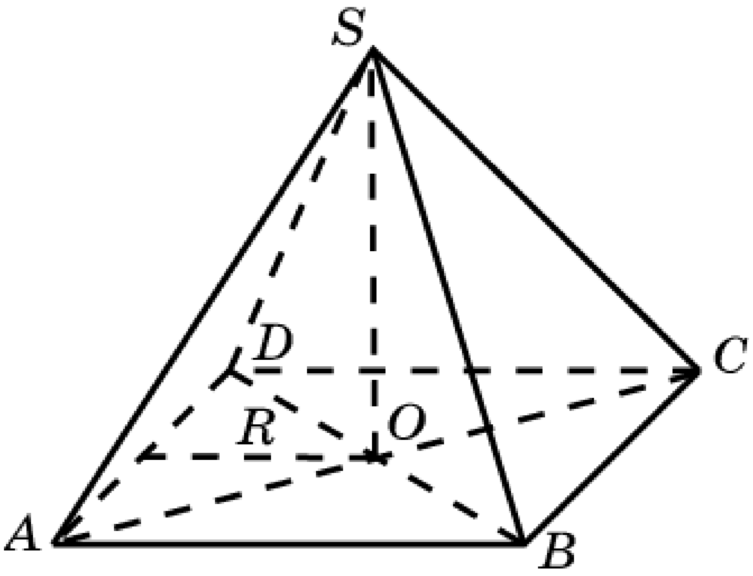
Приведите пример треугольной пирамиды, для которой не существует полувписанной сферы.



Решение. Рассмотрим тетраэдр, у которого одно ребро равно 1, а все остальные ребра равны 2. Для него не выполняется условие, указанное в упражнении 1. Следовательно, для этого тетраэдра не существует полувписанной сферы.

Упражнение 4

Найдите радиус сферы, полувписанной в правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны 1.

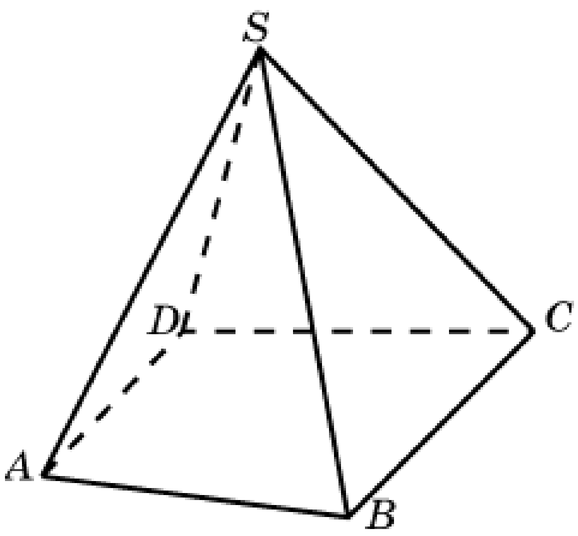


Решение. Пусть O – центр основания призмы. Расстояния от O до ребер призмы равны 0,5. Следовательно, радиус полувписанной сферы равен $\frac{1}{2}$.

Ответ: $R = \frac{1}{2}$.

Упражнение 5

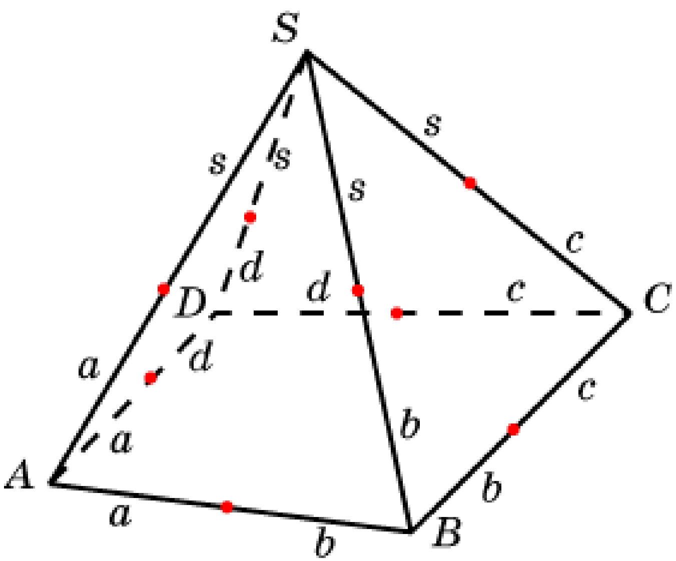
Докажите, что если для четырехугольной пирамиды существует полувписанная сфера, то суммы противоположных сторон ее основания равны.



Решение. Если сфера полувписана в четырехугольную пирамиду, то у четырехугольника, лежащего в основании этой пирамиды, существует вписанная окружность. Следовательно, суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.

Упражнение 6

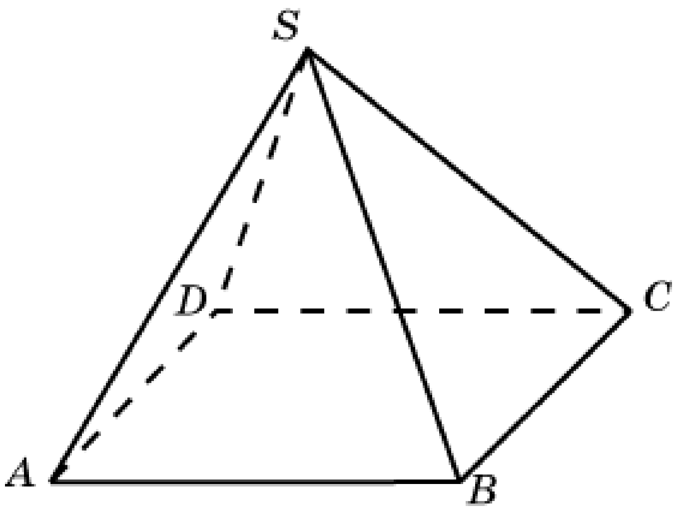
Докажите, что если для четырехугольной пирамиды *SABCD* существует полувписанная сфера, то выполняются следующие равенства: $SA + BC = AB + SC$, $SB + CD = BC + SD$, $SC + AD = CD + SA$, $SD + AB = AD + SB$.



Решение. Пусть у пирамиды *SABCD* существует полувписанная сфера. Обозначим через *a*, *b*, *c*, *d* и *s* расстояния от соответствующих вершин пирамиды до точек касания. Тогда $SA = a + s$, $BC = b + c$. Значит, $SA + BC = a + b + c + s$. Аналогично, $AB + SC = a + b + c + s$. Следовательно, выполняется равенство $SA + BC = AB + SC$. Таким же образом доказывается выполнимость и других указанных равенств.

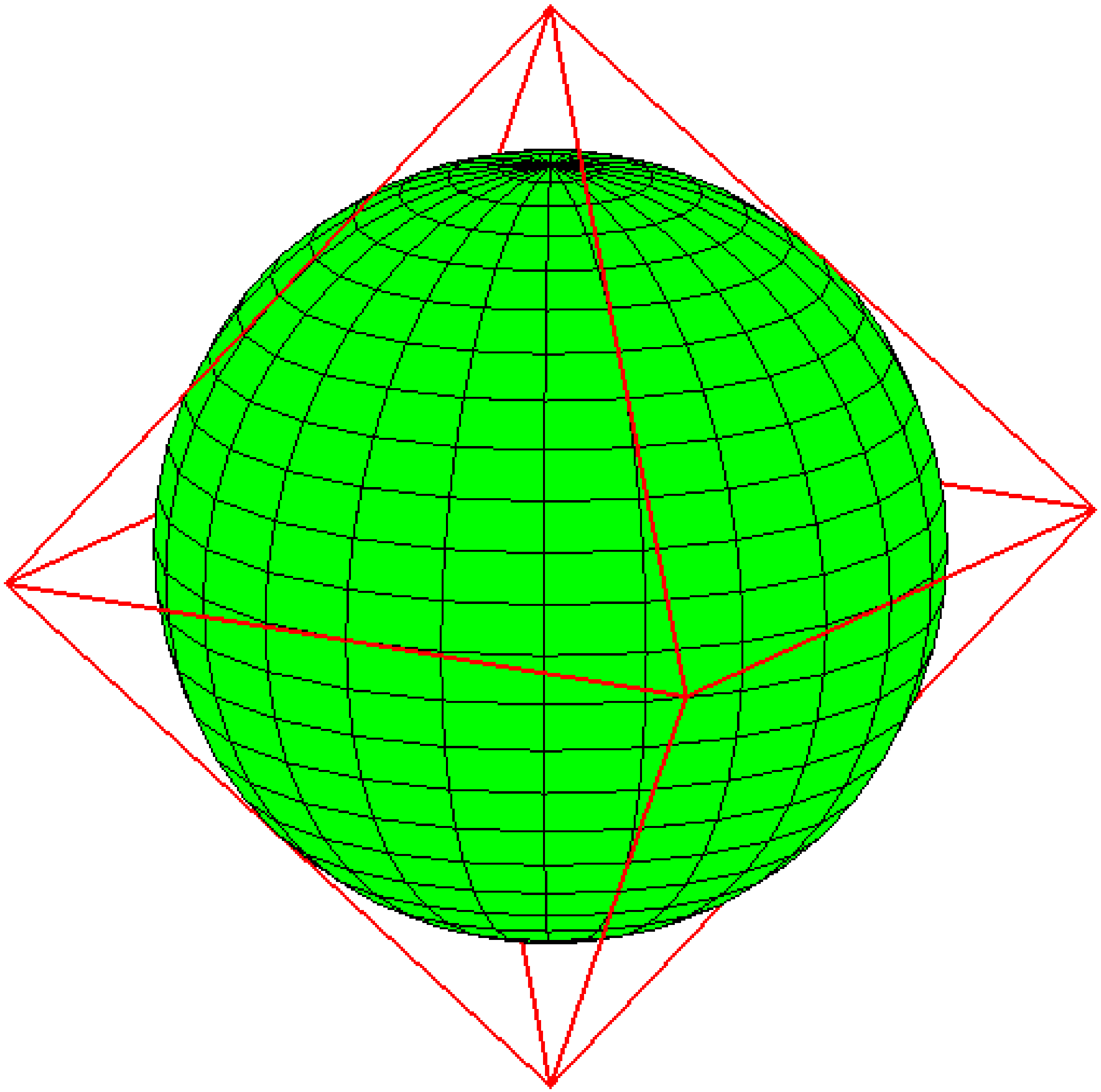
Упражнение 7

Приведите пример четырехугольной пирамиды, для которой не существует полувписанной сферы.



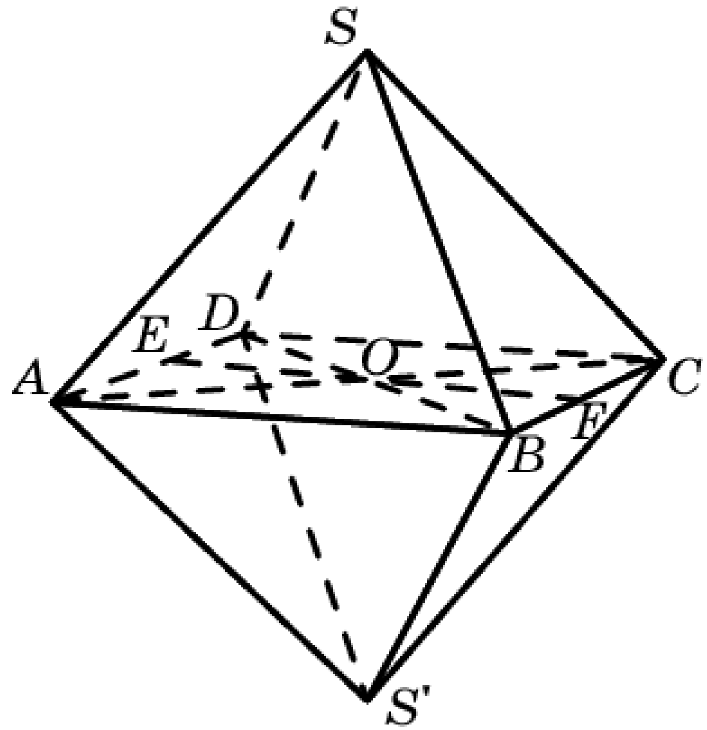
Решение. Рассмотрим, например, четырехугольную пирамиду, в основании которой лежит прямоугольник, отличный от квадрата, и все боковые ребра равны. Поскольку в прямоугольник нельзя вписать окружность, то у данной пирамиды не существует полувписанной сферы.

Сфера, полувписанная в октаэдр



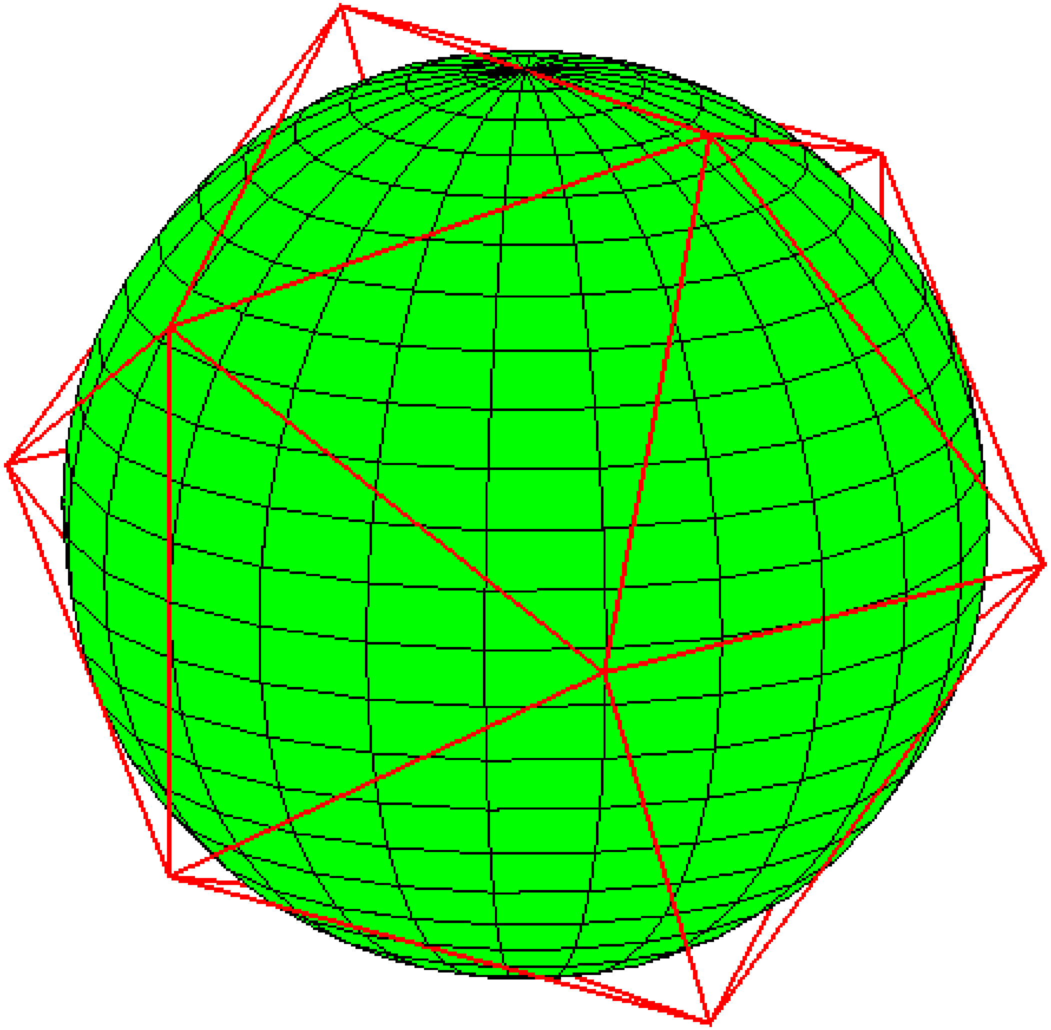
Упражнение

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в октаэдр с ребром 1.



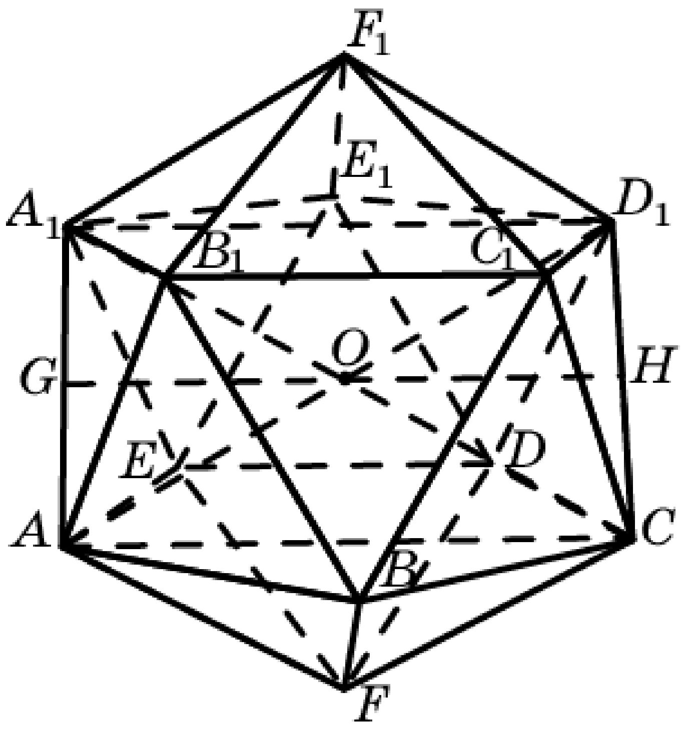
Решение. Пусть O – центр описанной сферы единичного октаэдра. Расстояние от O до ребер октаэдра равны и равны половине ребра, т.е. O будет центром полувписанной сферы, радиус которой равен $\frac{1}{2}$.

Сфера, полувписанная в икосаэдр



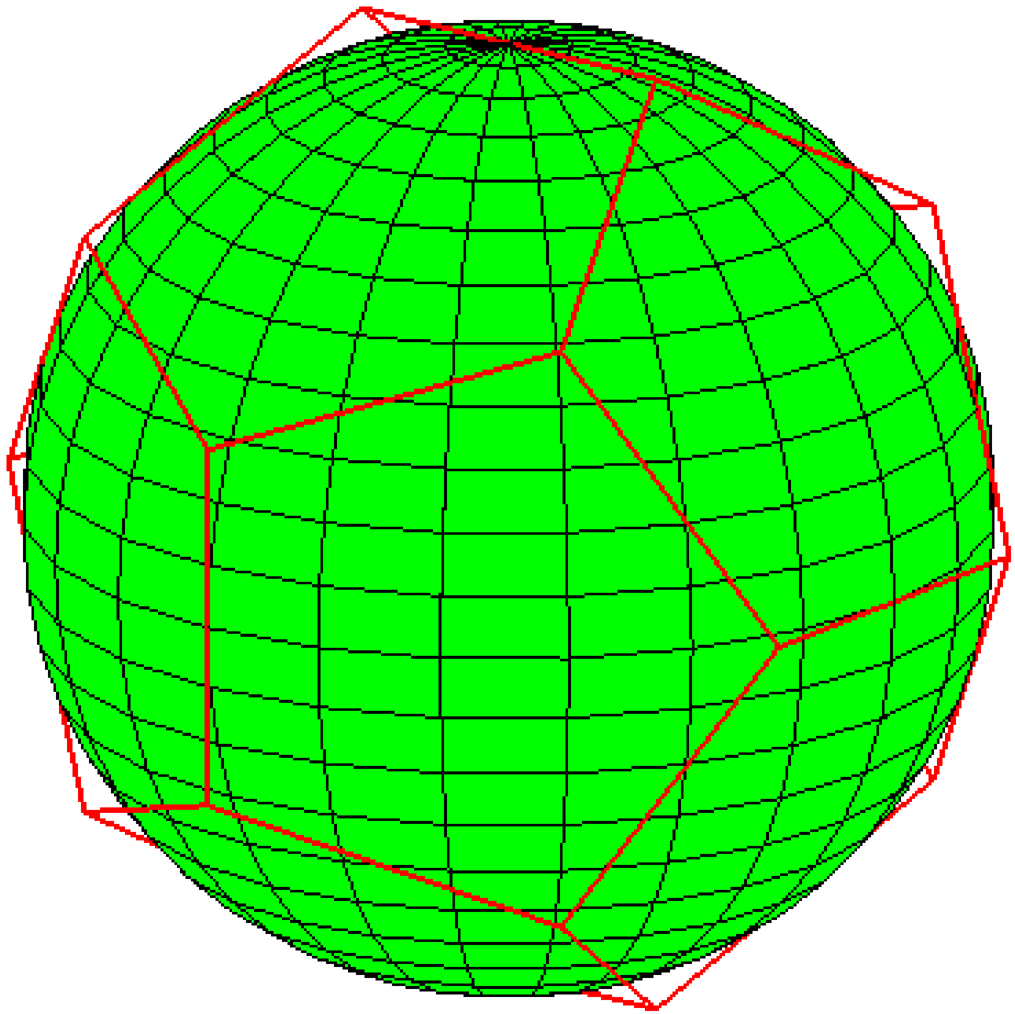
Упражнение

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в икосаэдр с ребром 1.



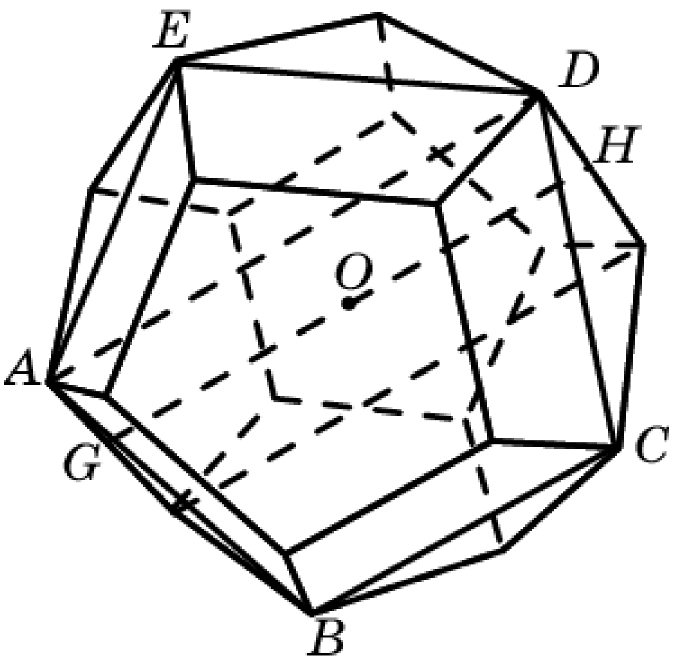
Решение. Обозначим O центр описанной сферы. Расстояния от O до ребер икосаэдра равны половине диагонали AC правильного пятиугольника $ABCDE$ со стороной 1. Учитывая, что эта диагональ равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, получаем, что радиус полувписанной сферы с центром O равен $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Сфера, полувписанная в додекаэдр



Упражнение

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в додекаэдр с ребром 1.



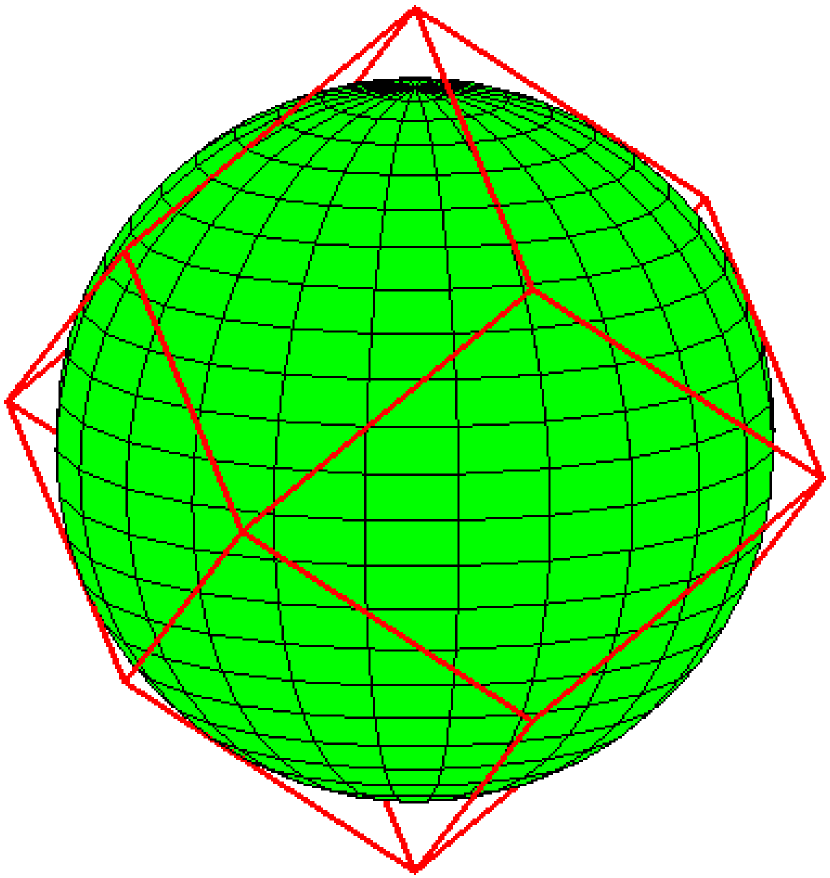
Решение. Обозначим O центр описанной сферы. Расстояния от O до ребер додекаэдра равны OH и равны половине диагонали AD правильного пятиугольника $ABCDE$, сторона которого равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, радиус полувписанной сферы с центром O равен $\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Сфера, полувписанная в ромбододекаэдр

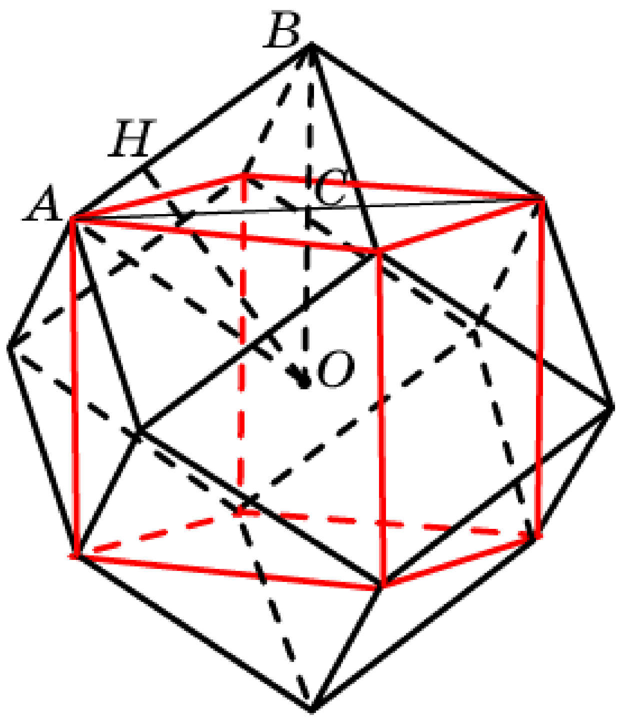
Ромбододекаэдром называется многогранник, гранями которого являются двенадцать ромбов.

Для получения ромбододекаэдра возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть равных 4-х угольных пирамид с вершинами в центре куба. Приложим эти пирамиды основаниями к граням второго куба. Образовавшийся многогранник будет ромбододекаэдром.



Упражнение

Найдите центр и радиус сферы, полувписанной в ромбододекаэдр с ребром 1.



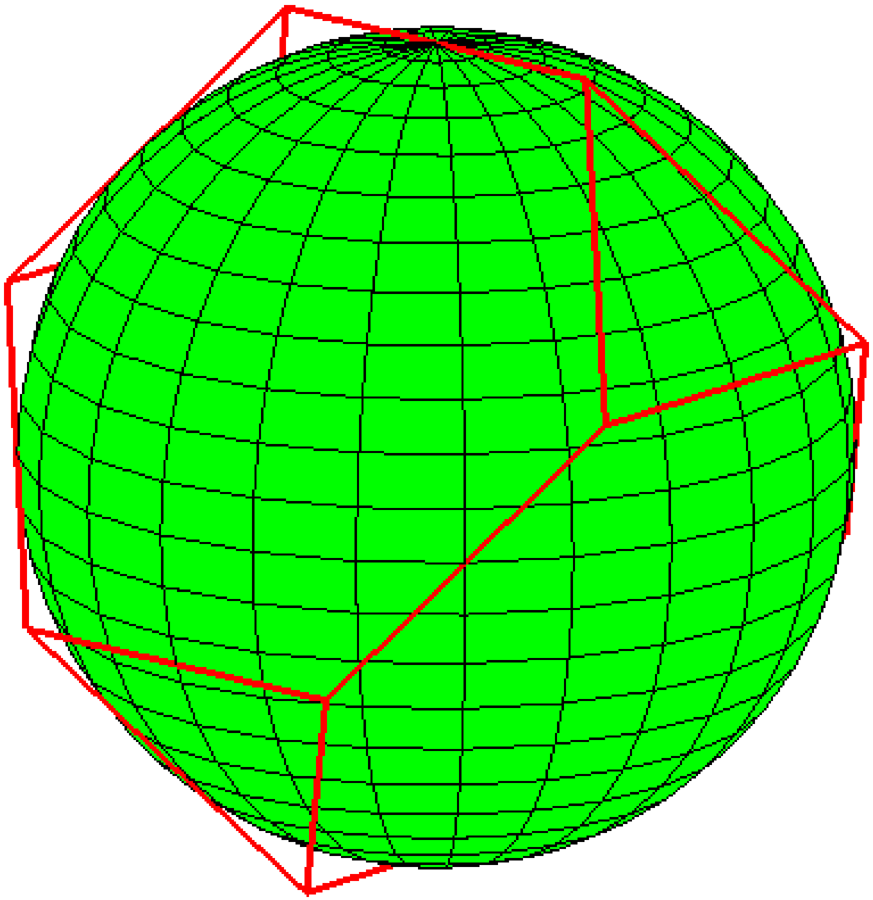
Решение. Обозначим O центр куба, вписанного в ромбододекаэдр. Ребро куба будет равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Расстояния от точки O до ребер ромбододекаэдра равны высоте OH треугольника OAB, в котором $OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$OA = AB = 1$, Отрезок AC перпендикулярен OB и равен $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Откуда $OH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Следовательно, искомый радиус полувписанной сферы равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

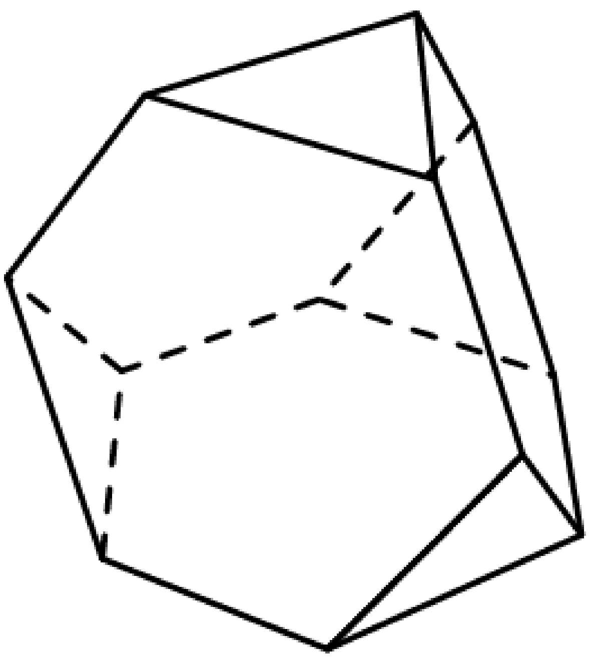
Сфера, полувписанная в усеченный тетраэдр



Радиус сферы, полувписанной в усеченный тетраэдр, равен радиусу сферы, полувписанной в соответствующий тетраэдр.

Упражнение

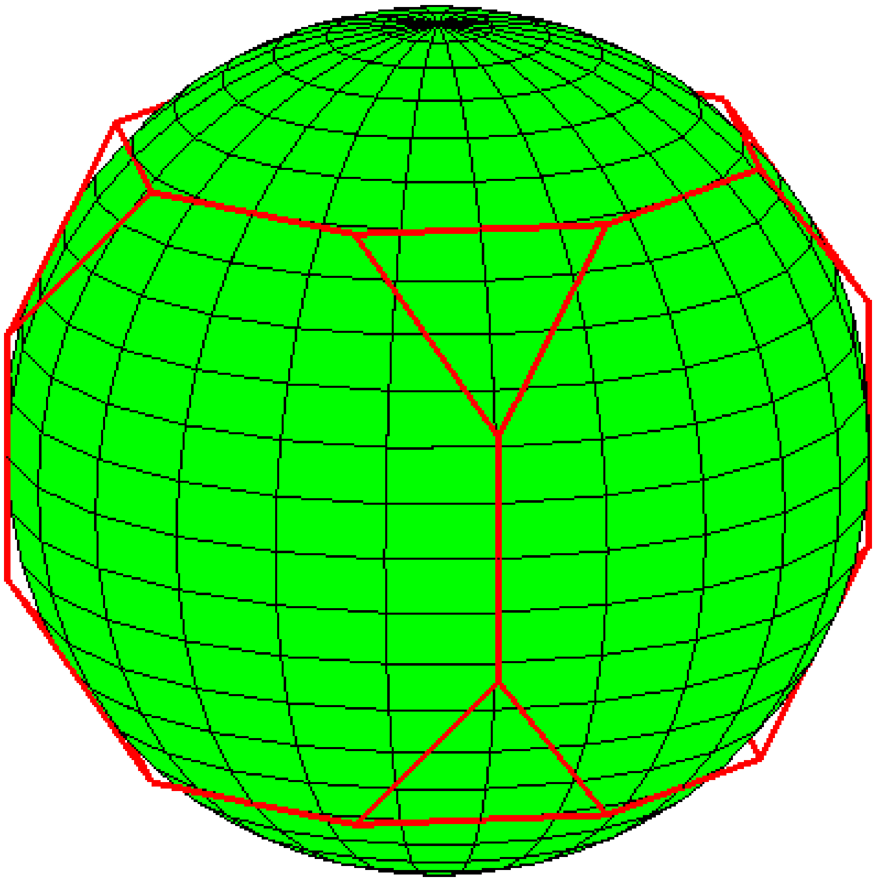
На рисунке изображен усеченный тетраэдр, получаемый отсечением от углов правильного тетраэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный тетраэдр, ребра которого равны 1.



Решение. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного тетраэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего тетраэдра, ребра которого равны 3. Следовательно, для искомого радиуса R имеем

$$R = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

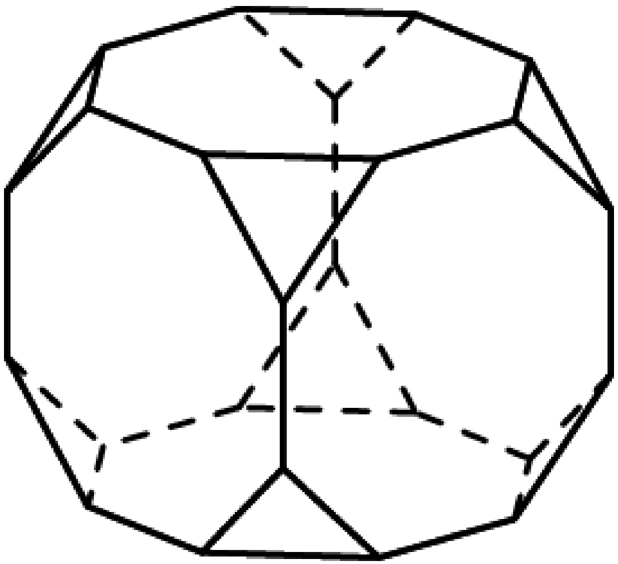
Сфера, полувписанная в усеченный куб



Радиус сферы, полувписанной в усеченный куб, равен радиусу сферы, полувписанной в соответствующий куб.

Упражнение

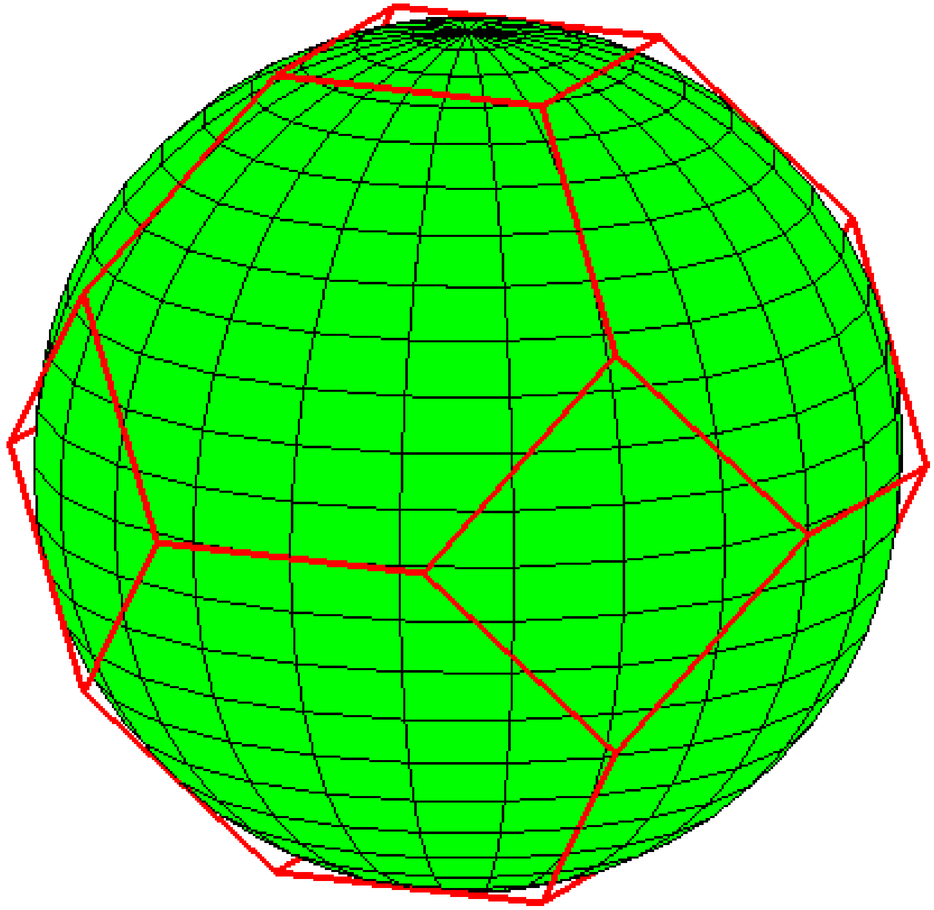
На рисунке изображен усеченный куб, получаемый отсечением от углов куба треугольных пирамид, гранями которого являются правильные восьмиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный куб, ребра которого равны 1.



Решение. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного куба равен радиусу полувписанной сферы соответствующего куба, ребра которого равны $\sqrt{2}+1$. Следовательно, для искомого радиуса R имеем

$$R = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

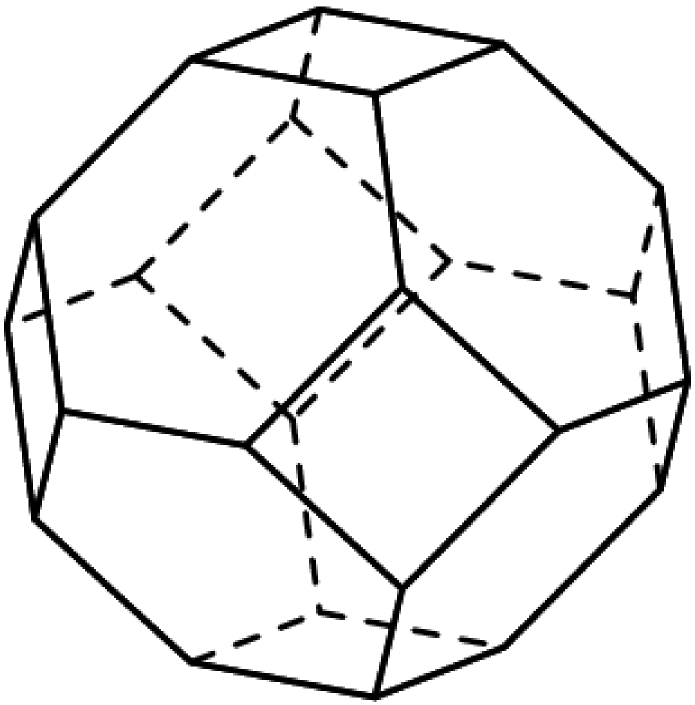
Сфера, полувписанная в усеченный октаэдр



Радиус сферы, полувписанной в усеченный октаэдр, равен радиусу сферы, полувписанной в соответствующий октаэдр.

Упражнение

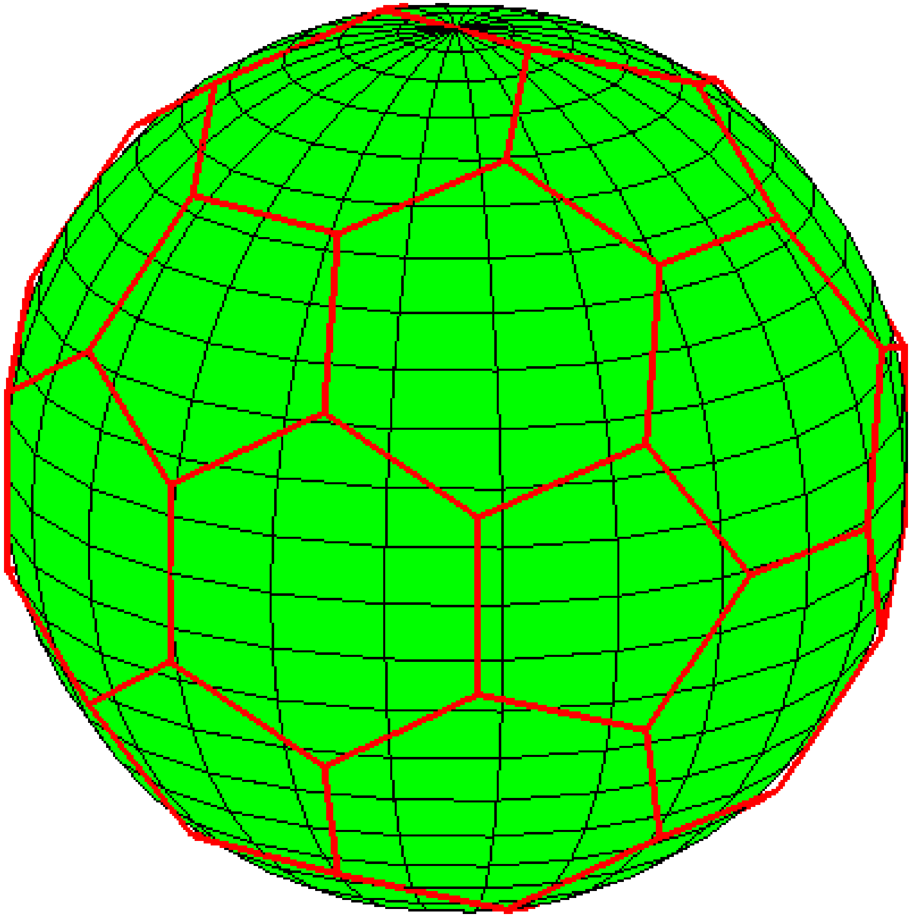
На рисунке изображен усеченный октаэдр, получаемый отсечением от углов октаэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный октаэдр, ребра которого равны 1.



Решение. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного октаэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего октаэдра, ребра которого равны 3. Следовательно, для искомого радиуса R имеем

$$R = \frac{3}{2}.$$

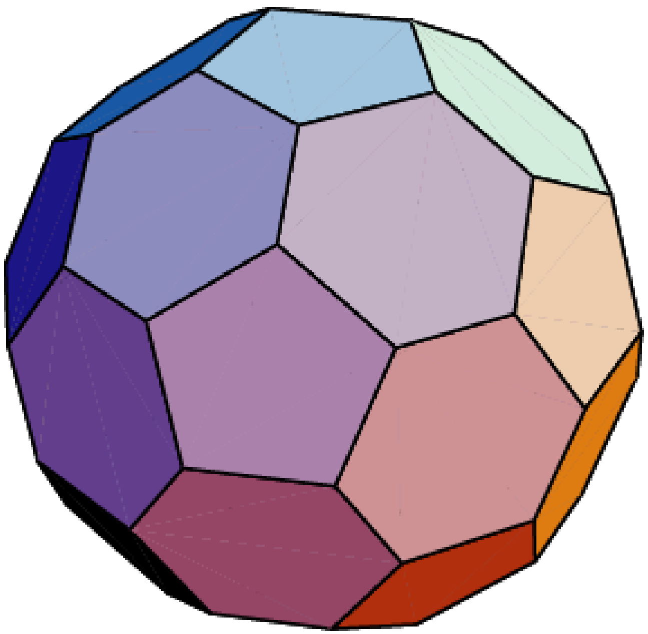
Сфера, полувписанная в усеченный икосаэдр



Радиус сферы, полувписанной в усеченный икосаэдр, равен радиусу сферы, полувписанной в соответствующий икосаэдр.

Упражнение

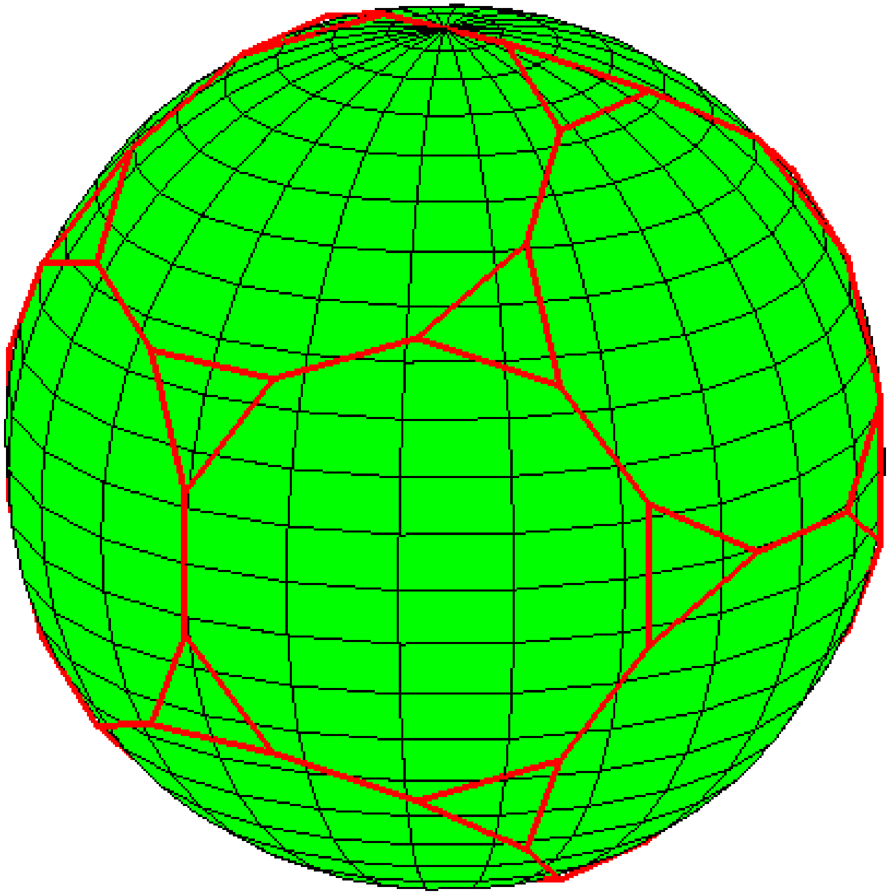
На рисунке изображен усеченный икосаэдр, получаемый отсечением от углов икосаэдра пятиугольных пирамид, гранями которого являются правильные шестиугольники и пятиугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный икосаэдр, ребра которого равны 1.



Решение. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного икосаэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего икосаэдра, ребра которого равны 3. Следовательно, для искомого радиуса *R* имеем

$$R = \frac{3+3\sqrt{5}}{4}.$$

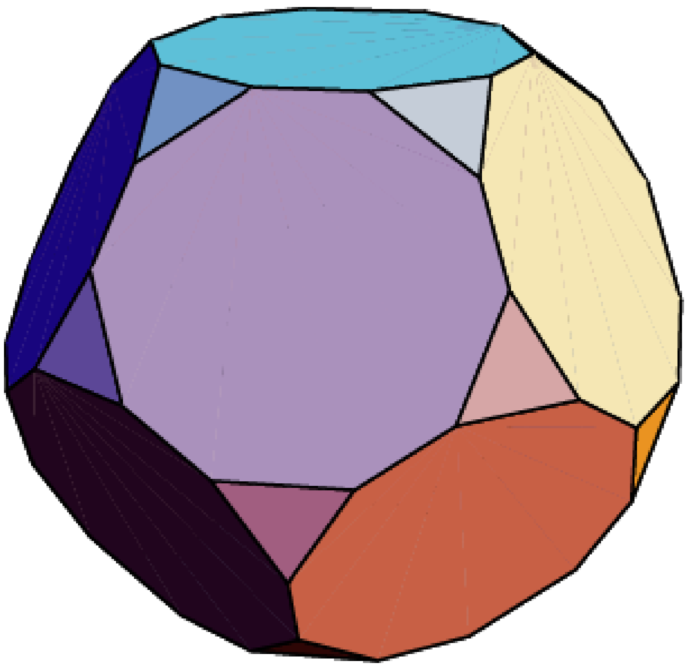
Сфера, полувписанная в усеченный додекаэдр



Радиус сферы, полувписанной в усеченный додекаэдр, равен радиусу сферы, полувписанной в соответствующий додекаэдр.

Упражнение

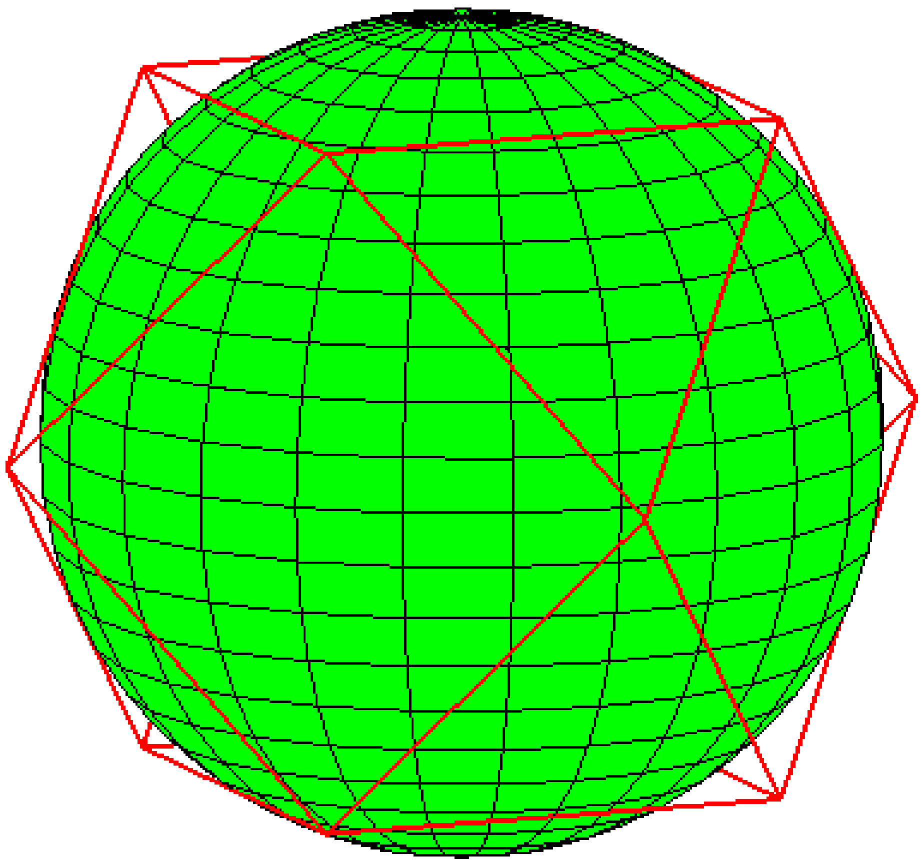
На рисунке изображен усеченный додекаэдр, получаемый отсечением от углов додекаэдра треугольных пирамид, гранями которого являются правильные десятиугольники и треугольники. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный додекаэдр, ребра которого равны 1.



Решение. Радиус полувписанной сферы для единичного усеченного додекаэдра равен радиусу полувписанной сферы соответствующего додекаэдра, ребра которого равны $\sqrt{5}$. Следовательно, для искомого радиуса R имеем

$$R = \frac{5+3\sqrt{5}}{4}.$$

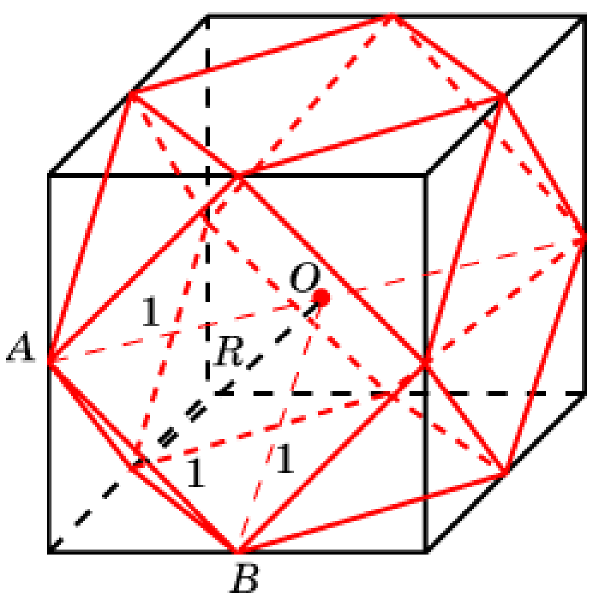
Сфера, полувписанная в кубооктаэдр



Радиус сферы, полувписанной в кубооктаэдр, равен ребру кубооктаэдра.

Упражнение

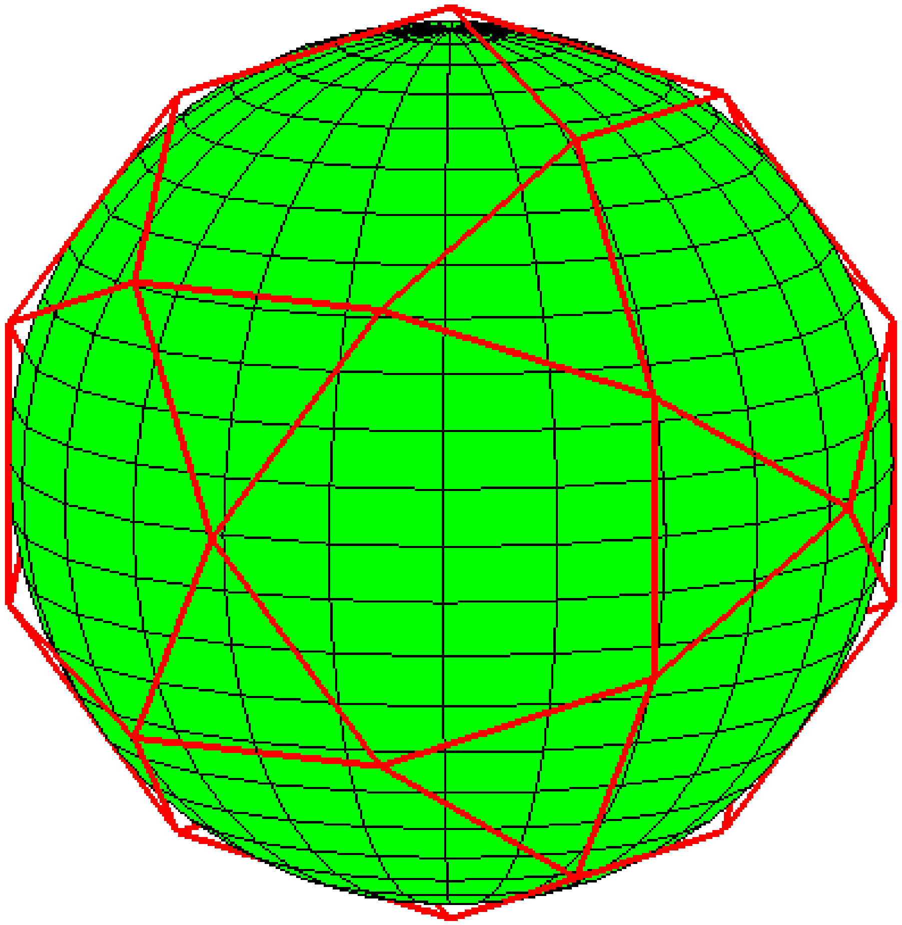
На рисунке изображен кубооктаэдр – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов (как у куба) и восемь треугольников (как у октаэдра). Найдите радиус полувписанной сферы.



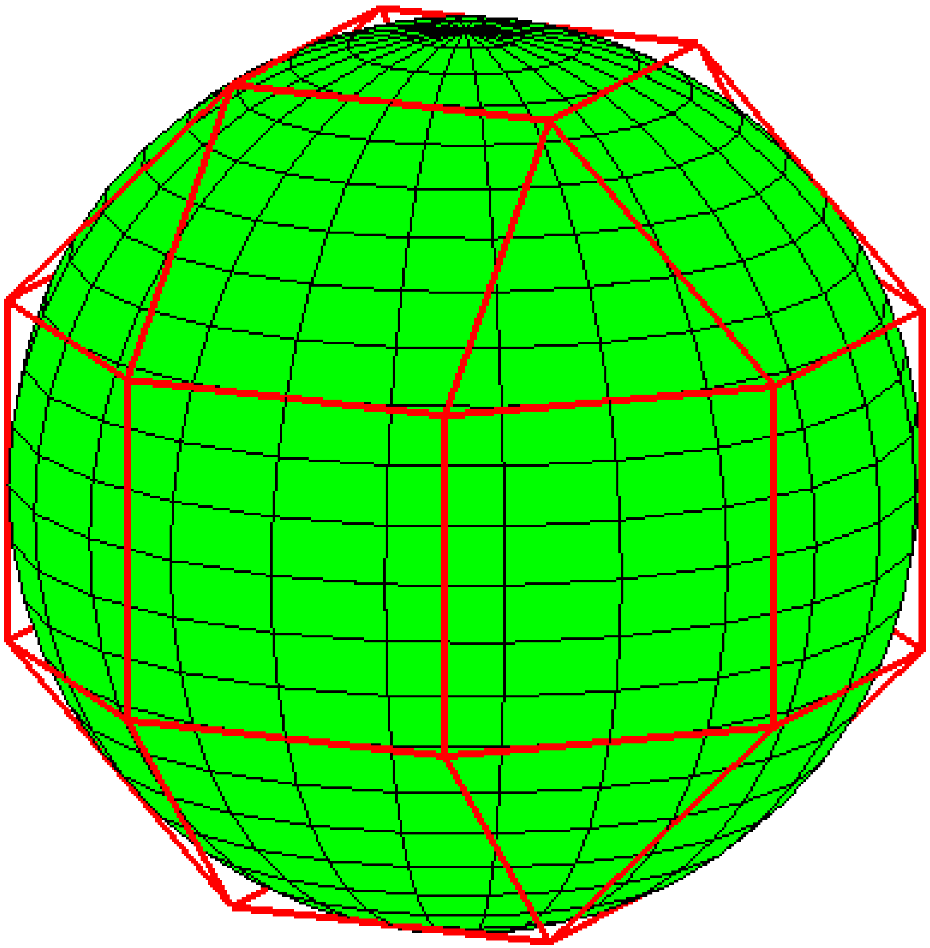
Решение. Напомним, что кубооктаэдр получается из куба отсечением правильных треугольных пирамид с вершинами в вершинах куба и боковыми ребрами, равными половине ребра куба. Если ребро кубоктаэдра равно 1, то ребро соответствующего куба равно $\sqrt{2}$. В треугольнике AOB все стороны равны 1, а его высота равна радиусу R полувписанной сферы. Следовательно,

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

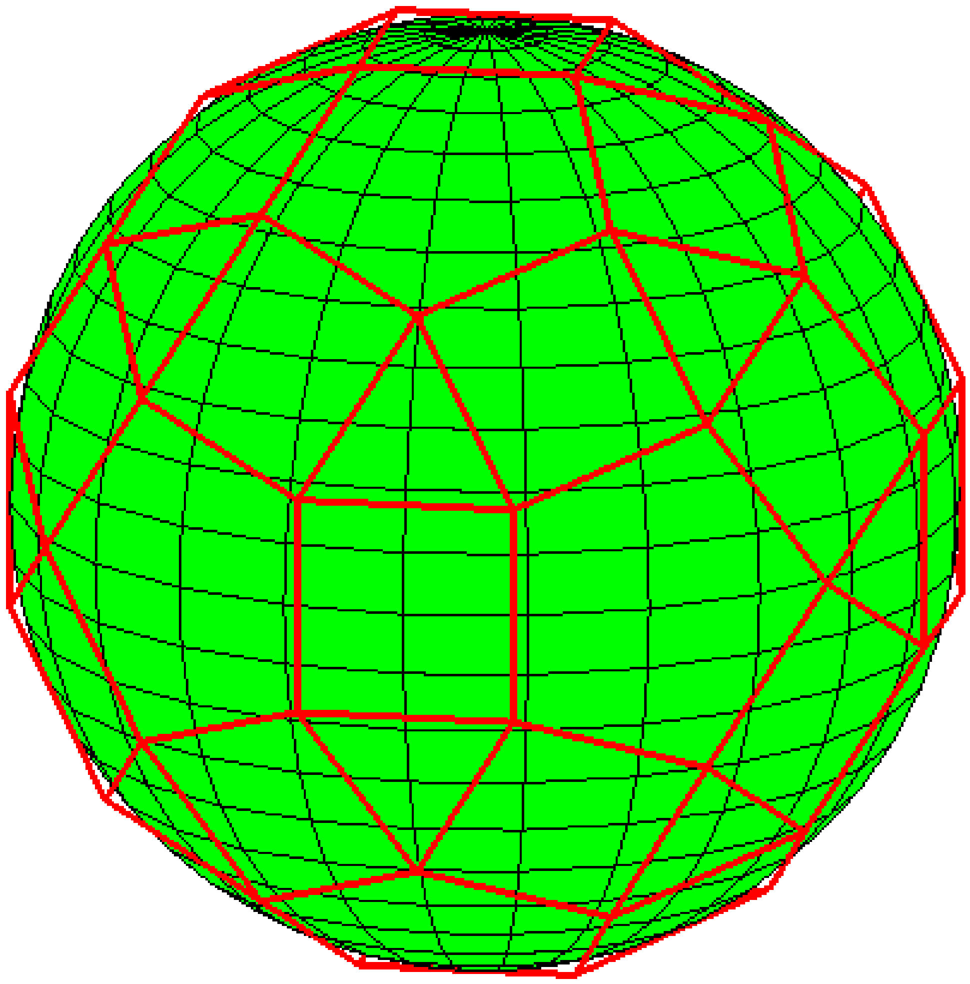
Сфера, полувписанная в икосододекаэдр



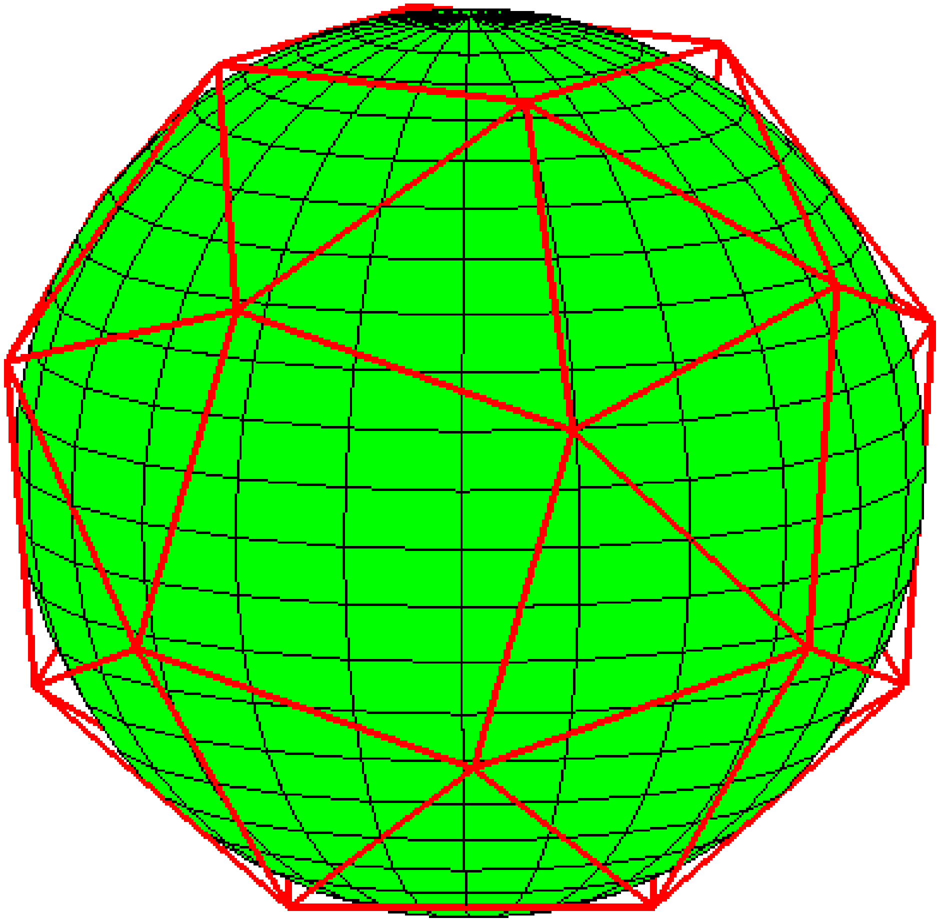
Сфера, полувписанная в ромбокубооктаэдр



Сфера, полувписанная в ромбоикосододекаэдр



Сфера, полувписанная в курносый куб



Сфера, полувписанная в курносый додекаэдр