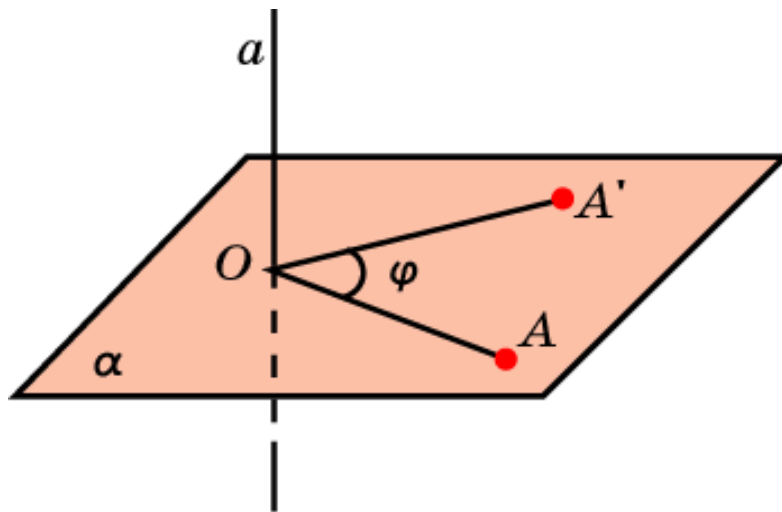


# ПОВОРОТ

Пусть теперь в пространстве задана прямая  $a$  и точка  $A$ , не принадлежащая этой прямой. Через точку  $A$  проведем плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную прямой  $a$ , и точку пересечения  $a$  и  $\alpha$  обозначим  $O$ . Говорят, что точка  $A'$  пространства получается из точки  $A$  поворотом вокруг прямой  $a$  на угол  $\varphi$ , если в плоскости  $\alpha$  точка  $A'$  получается из точки  $A$  поворотом вокруг центра  $O$  на угол  $\varphi$ . Преобразование пространства, при котором точки прямой  $a$  остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол  $\varphi$  называется **поворотом**, или **вращением**. Прямая  $a$  при этом называется **осью вращения**.

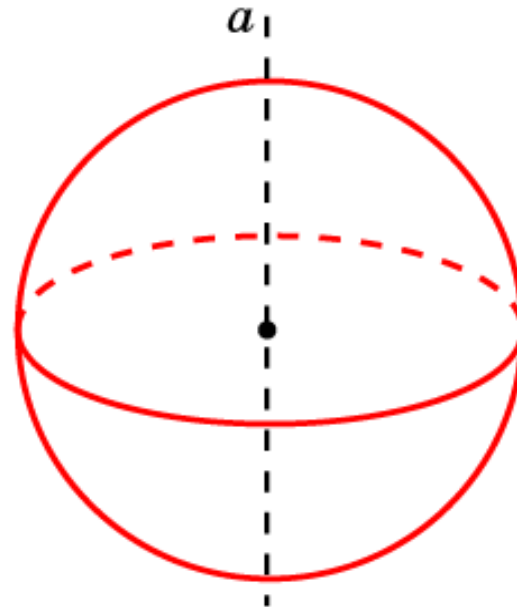
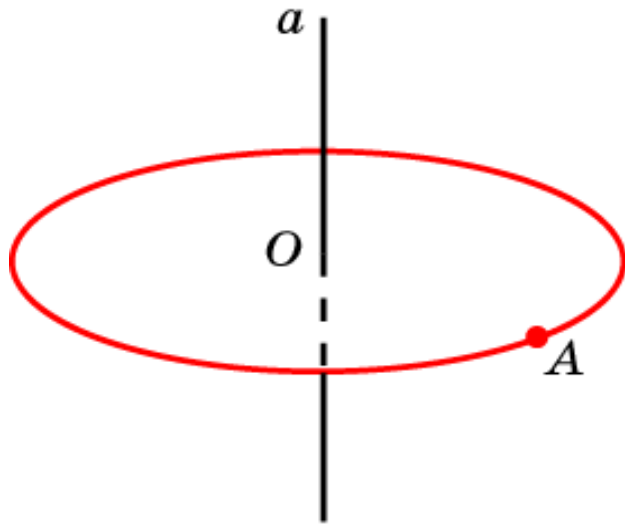


# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Говорят, что фигура  $\Phi$  в пространстве получена вращением фигуры  $F$  вокруг оси  $a$ , если точки фигуры  $\Phi$  получаются всевозможными поворотами точек фигуры  $F$  вокруг оси  $a$ . Фигура  $\Phi$  при этом называется **фигурой вращения**.

При вращении точки  $A$  вокруг прямой  $a$  получается **окружность**.

**Сфера** получается вращением окружности вокруг ее диаметра. Аналогично, **шар** получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра.

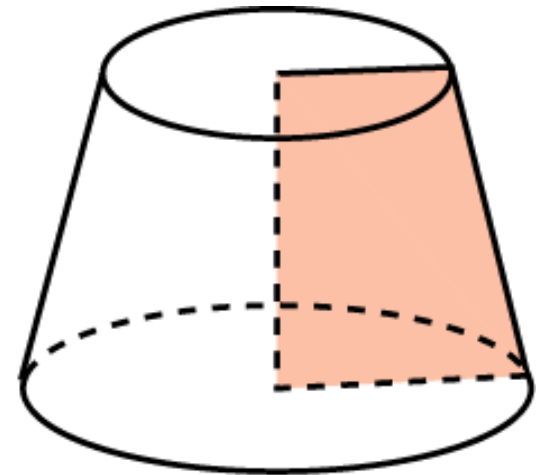
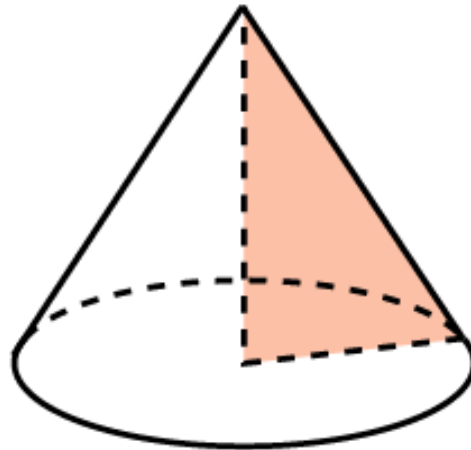
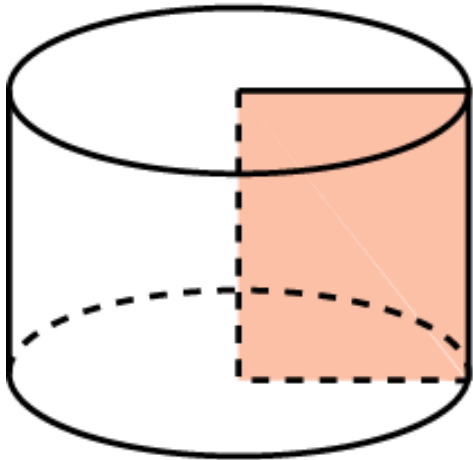


# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

**Цилиндр** получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

**Конус** получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

**Усеченный конус** получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу.

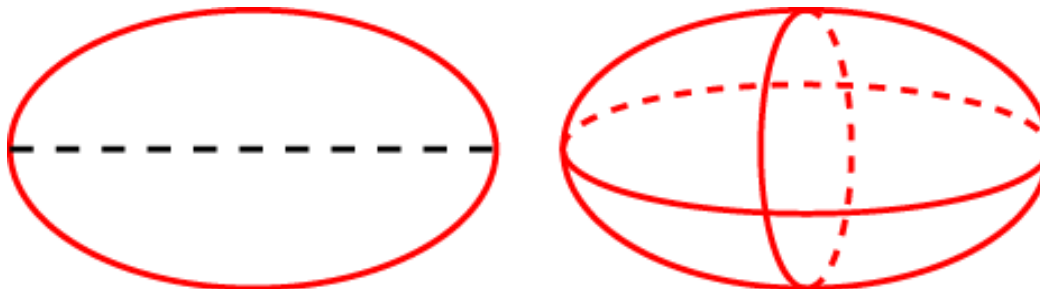


# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек, то полученная поверхность вращения называется **тором** и по форме напоминает баранку или бублик.



При вращении эллипса вокруг его оси получается поверхность, называемая **эллипсоидом вращения**.



# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

При вращении параболы вокруг ее оси получается поверхность, называемая **параболоидом вращения**.

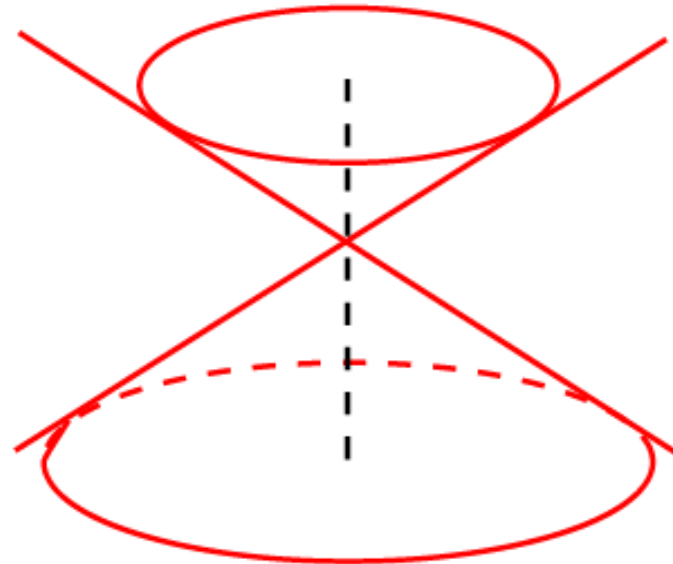
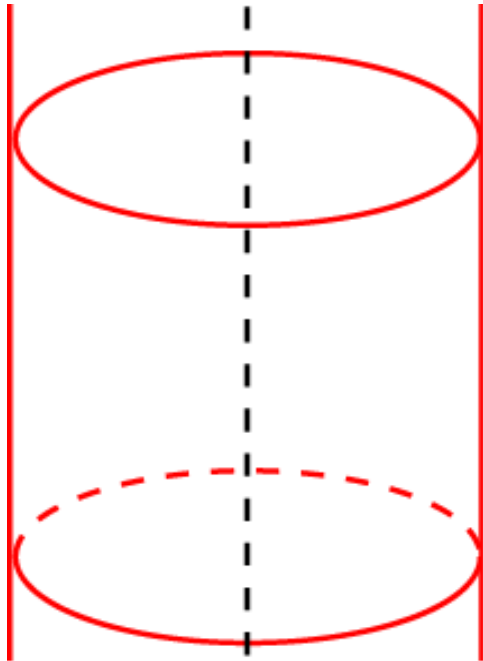


При вращении гиперболы вокруг ее оси получается поверхность, называемая **гиперболоидом вращения**.



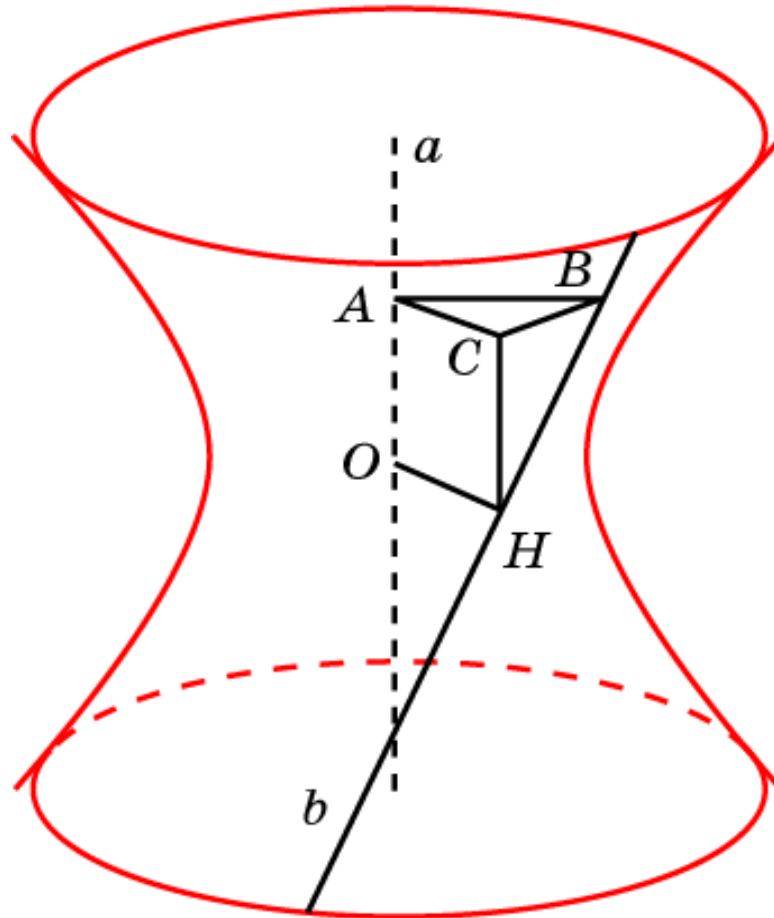
# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая цилиндрической поверхностью. Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая конической поверхностью.



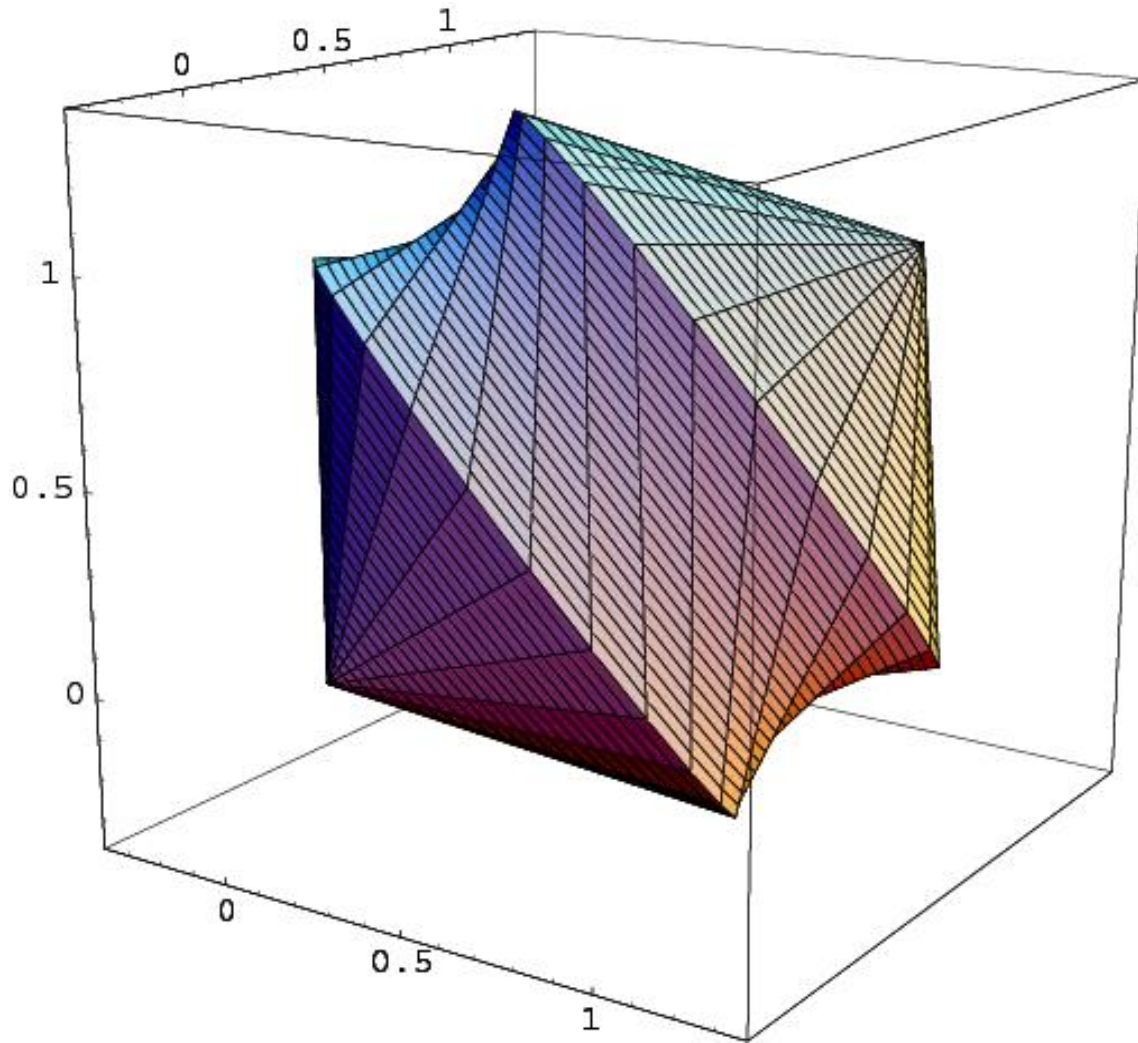
# ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

**Теорема.** При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперболоид вращения.



# ВРАЩЕНИЕ КУБА 1

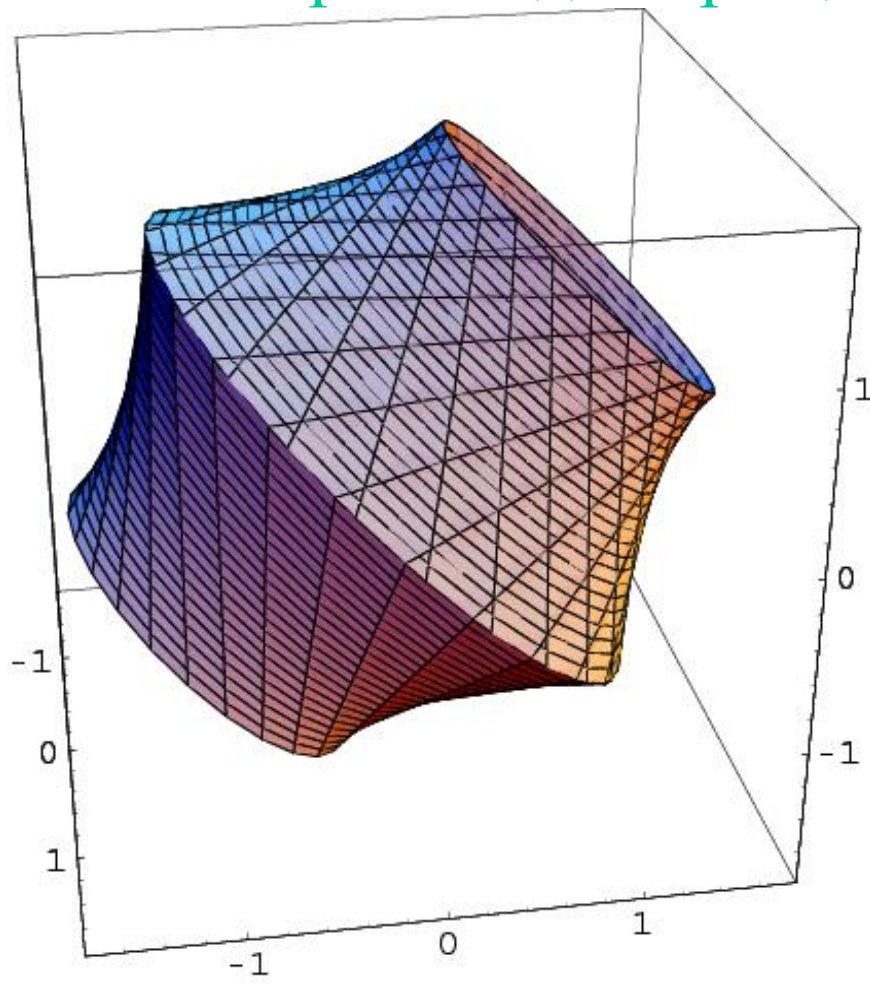
При вращении куба вокруг диагонали получается фигура, поверхность которой состоит из боковых поверхностей двух конусов и поверхности гиперболоида вращения.





## ВРАЩЕНИЕ КУБА 2

При вращении куба вокруг прямой, соединяющей середины двух противоположных ребер, получается фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и двух поверхностей гиперболоидов вращения.



# Упражнение 1

Какая фигура получается при вращении отрезка  $OA$  вокруг прямой, проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной  $OA$ ?

Ответ: Круг.

## Упражнение 2

Назовите прямые, при вращении вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

**Ответ:** Прямые, пересекающие прямоугольник по отрезку, параллельному его стороне.

## Упражнение 3

Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенной на основание этого треугольника?

Ответ: Конус.

## Упражнение 4

Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр?

Ответ: Круг.

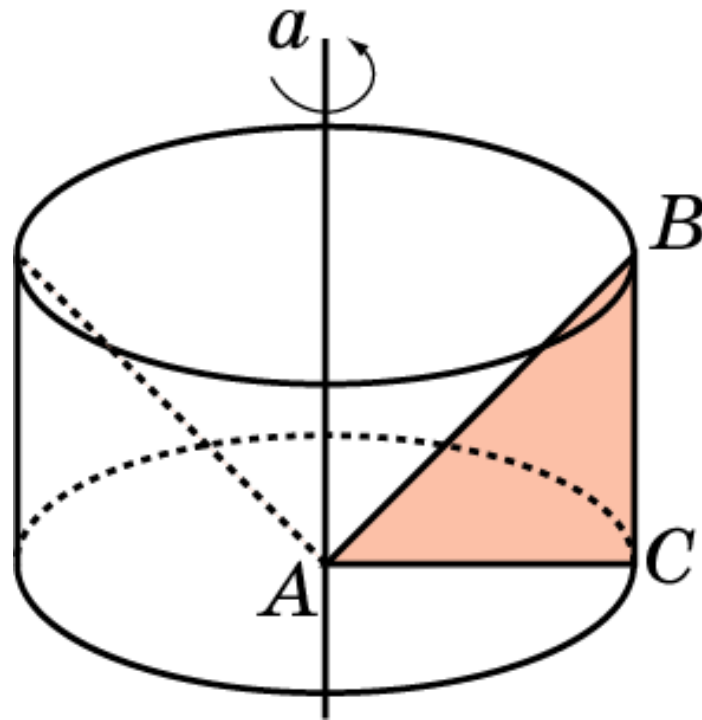
## Упражнение 5

Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет?

Ответ: Конус.

## Упражнение 6

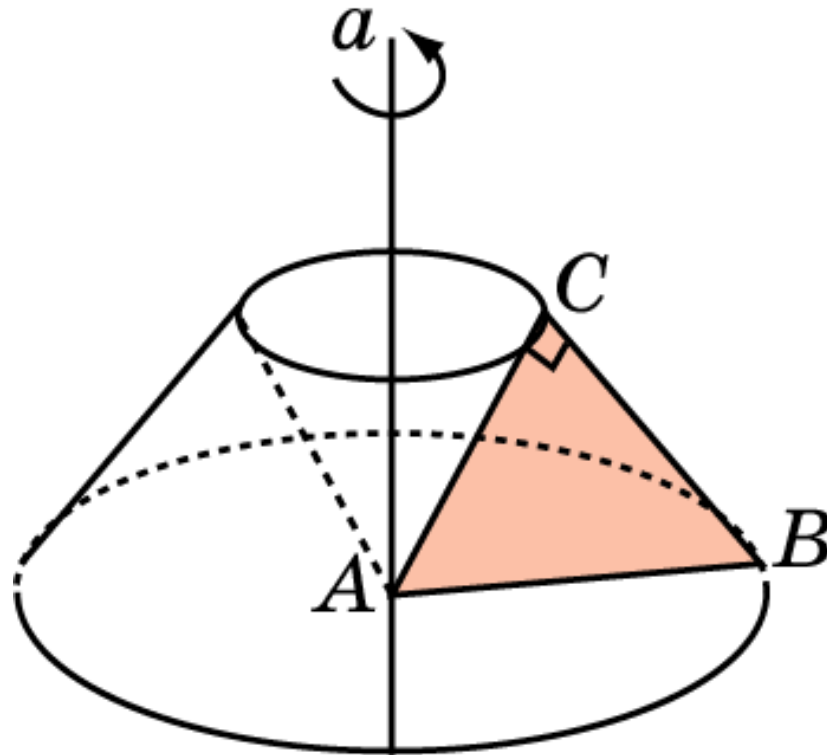
Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, и проходящей через вершину острого угла перпендикулярно катету?



**Ответ:** Цилиндр, из которого вырезан конус.

## Упражнение 7

Какая фигура получается вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, перпендикулярной гипотенузе и проходящей через вершину острого угла.



**Ответ:** Усеченный конус, из которого вырезан конус.



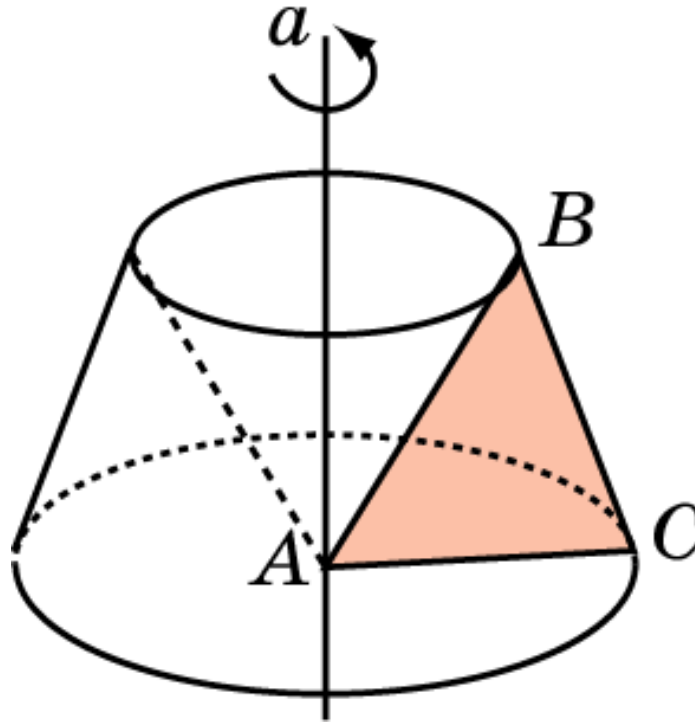
## Упражнение 8

Какая фигура получается вращением остроугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его сторону?

**Ответ:** Фигура, состоящая из двух конусов с общим основанием.

## Упражнение 9

Какая фигура получается вращением остроугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через его вершину перпендикулярно стороне?



**Ответ:** Усечённый конус с вырезанным внутри конусом.

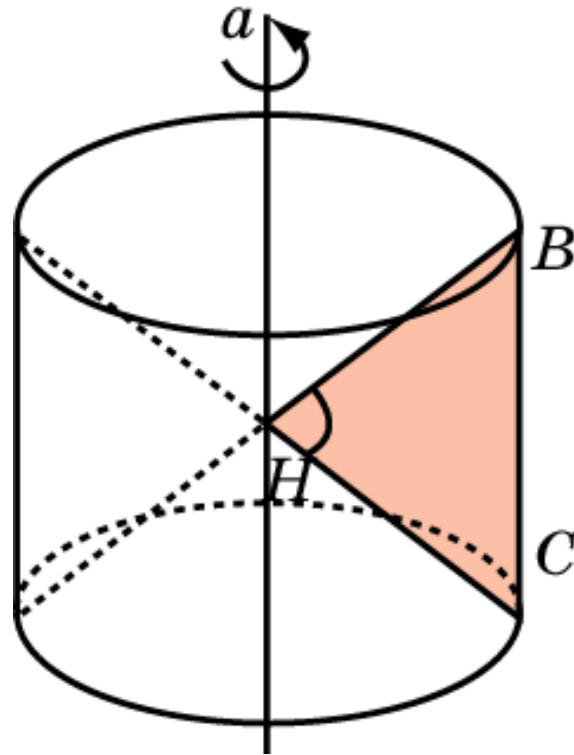
## Упражнение 10

Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, прилежащую к тупому углу?

**Ответ:** Фигура, полученная из конуса, вырезанием из него другого конуса.

## Упражнение 11

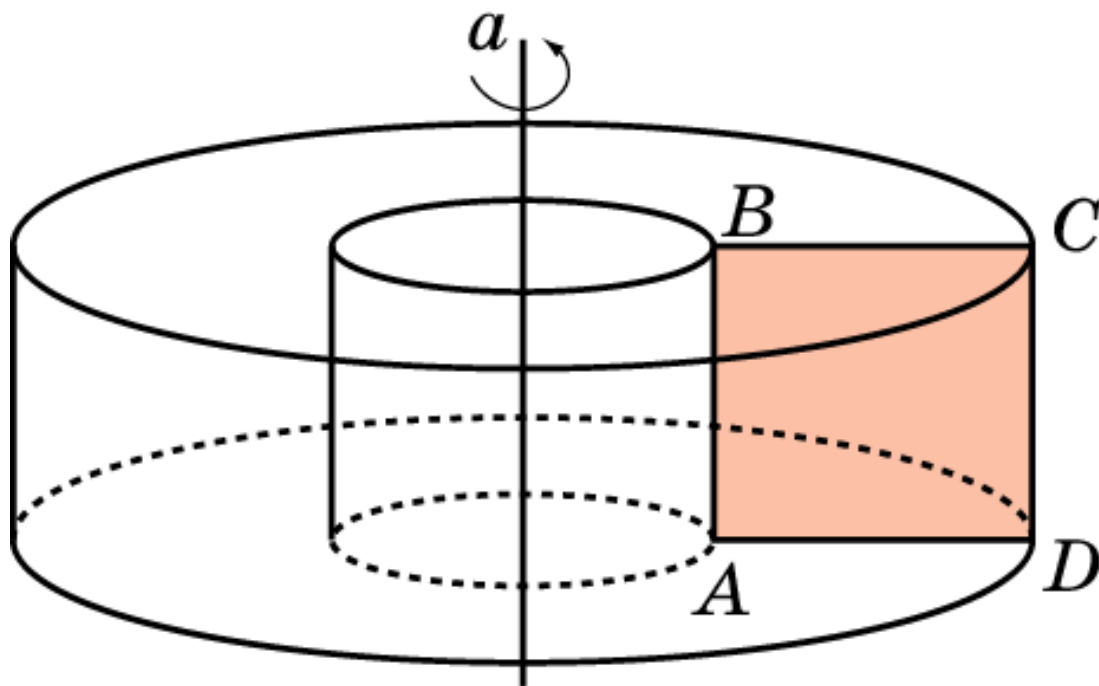
Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через вершину тупого угла параллельно противоположной стороне?



**Ответ:** Цилиндр с вырезанными внутри двумя конусами, имеющими общую вершину.

## Упражнение 12

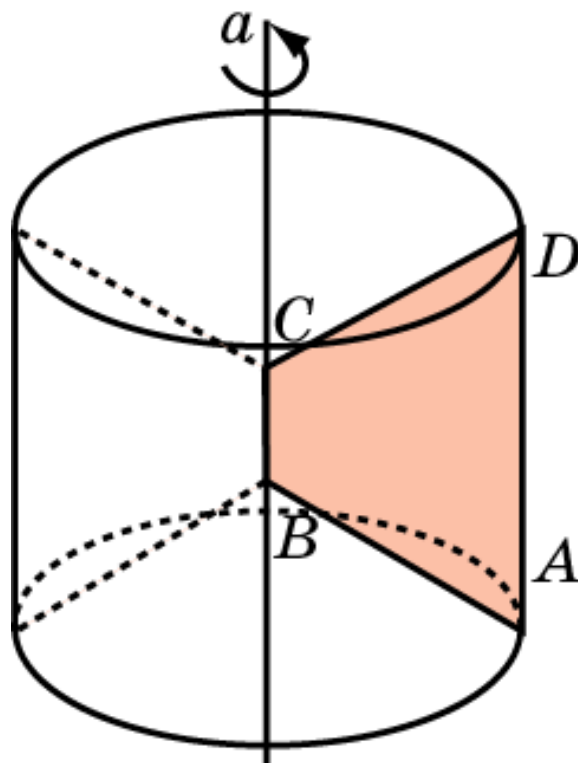
Какая фигура получается вращением прямоугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого прямоугольника, параллельной его стороне, и не имеющей с ним общих точек?



**Ответ:** Фигура, полученная из цилиндра, вырезанием из него другого цилиндра.

## Упражнение 13

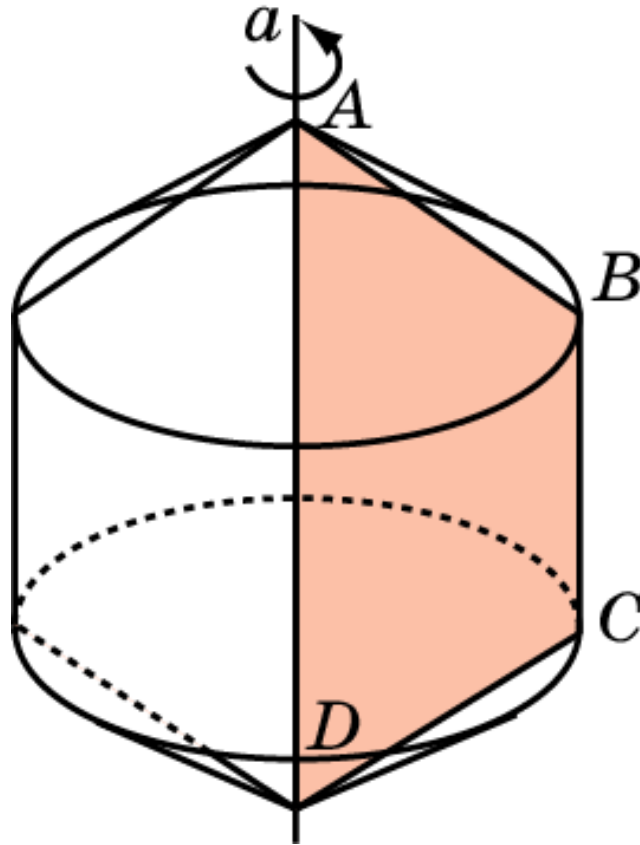
Какая фигура получается вращением трапеции вокруг прямой, содержащей меньшее её основание?



Ответ: Цилиндр с вырезанными внутри двумя конусами.

## Упражнение 14

Какая фигура получается вращением трапеции вокруг прямой, содержащей большее её основание?



**Ответ:** Цилиндр, на основания которого поставлены конусы.

## Упражнение 15

Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней.

Ответ: Цилиндр.



## Упражнение 16

Какая фигура получится при вращении правильной  $n$ -угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований?

Ответ: Цилиндр.

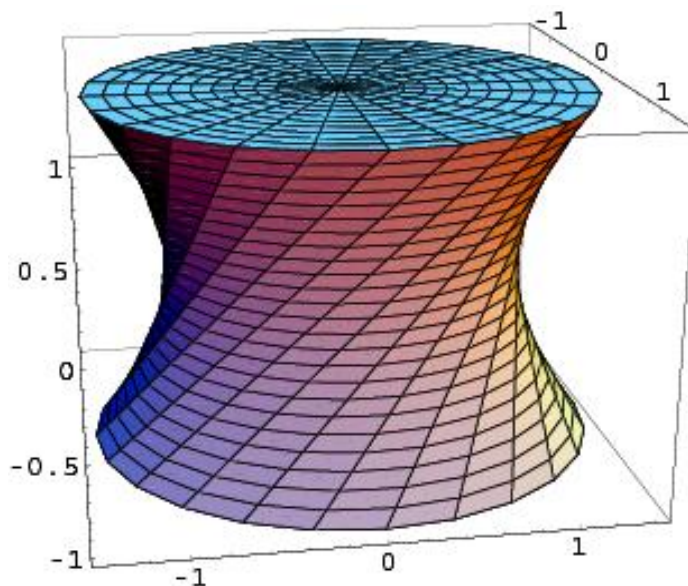
## Упражнение 17

Какая фигура получается при вращении правильной  $n$ -угольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту?

Ответ: Конус.

## Упражнение 18

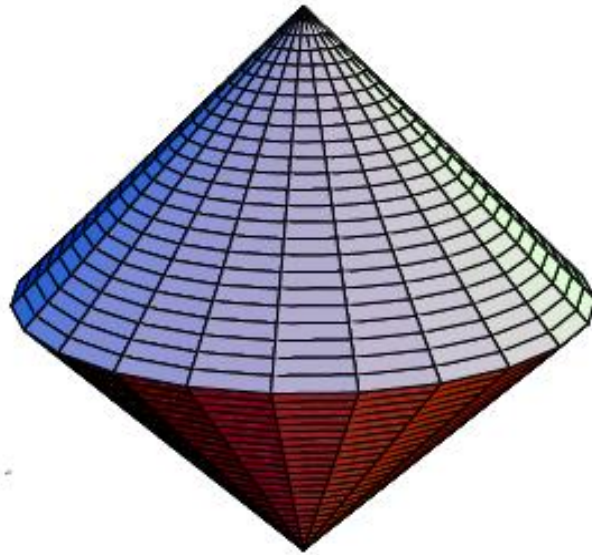
Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер?



**Ответ:** Фигура, ограниченная двумя кругами и гиперболоидом вращения.

## Упражнение 19

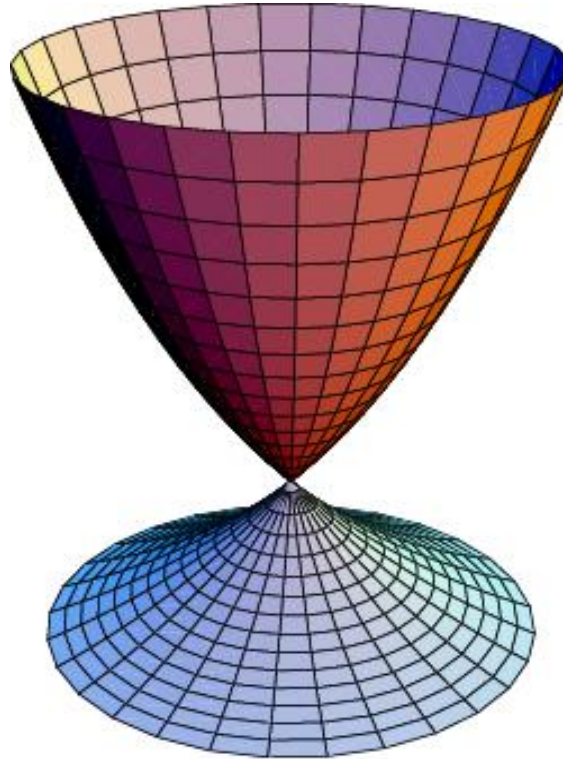
Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины?



**Ответ:** Фигура, состоящая из двух конусов с общим основанием.

## Упражнение 20

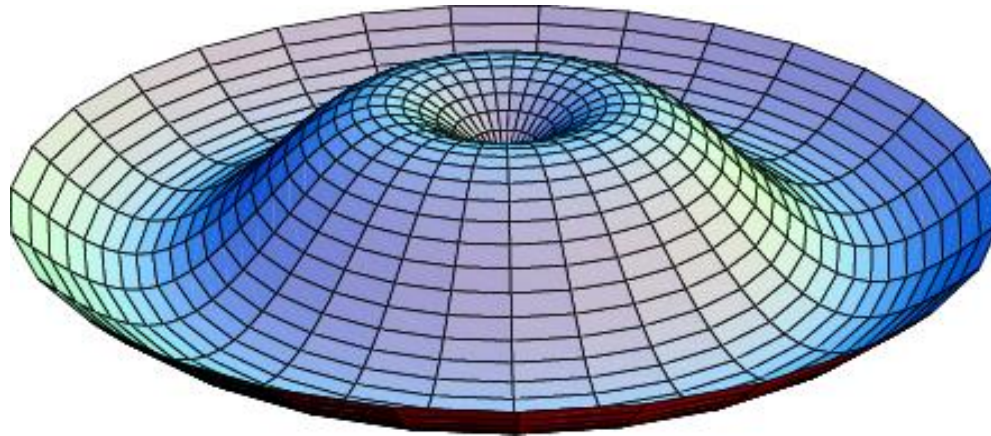
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: Показательной функции.

## Упражнение 21

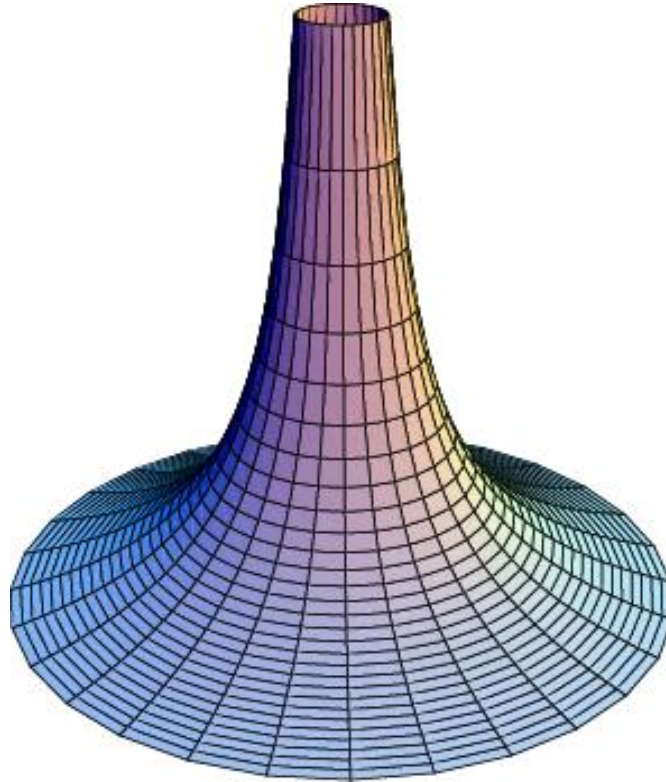
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: Синусоиды.

## Упражнение 22

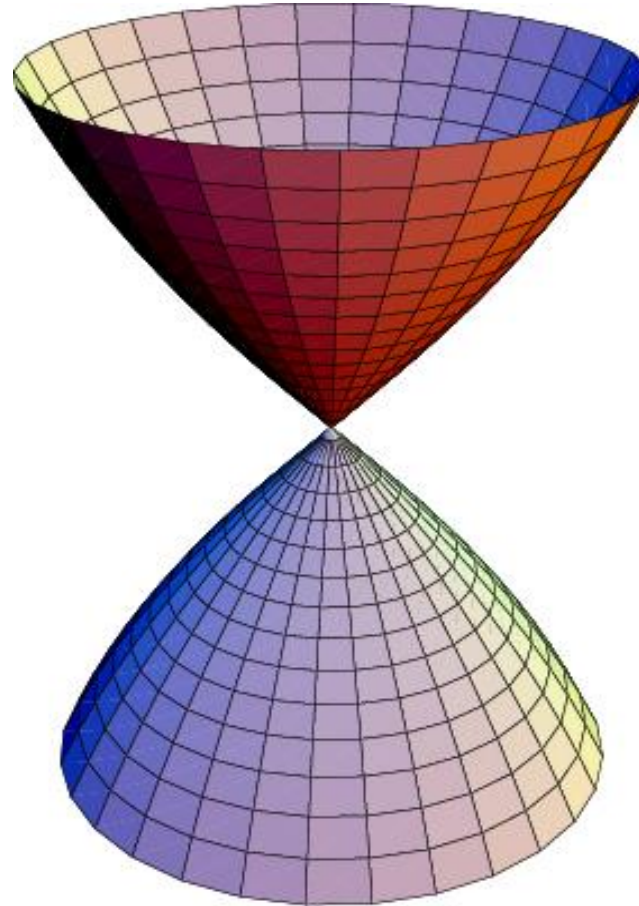
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ:  $y = \frac{1}{x}$ .

## Упражнение 23

Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?

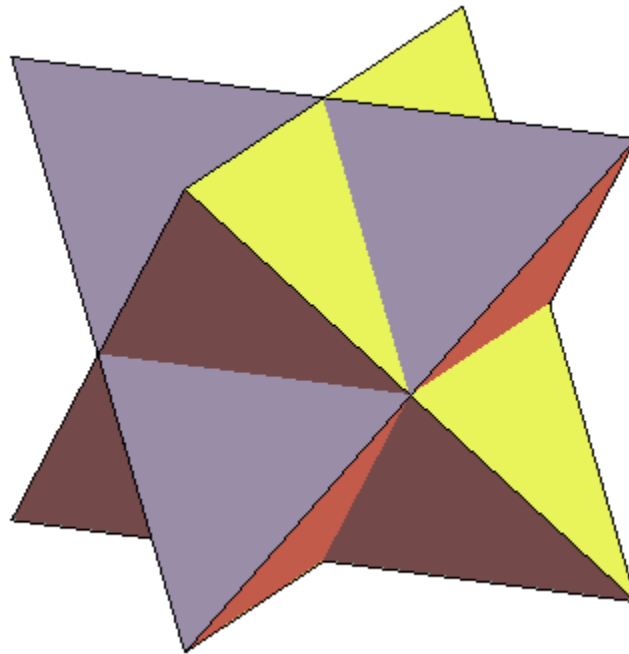


Ответ:  $y = \operatorname{tg} x$ .



## Упражнение 24

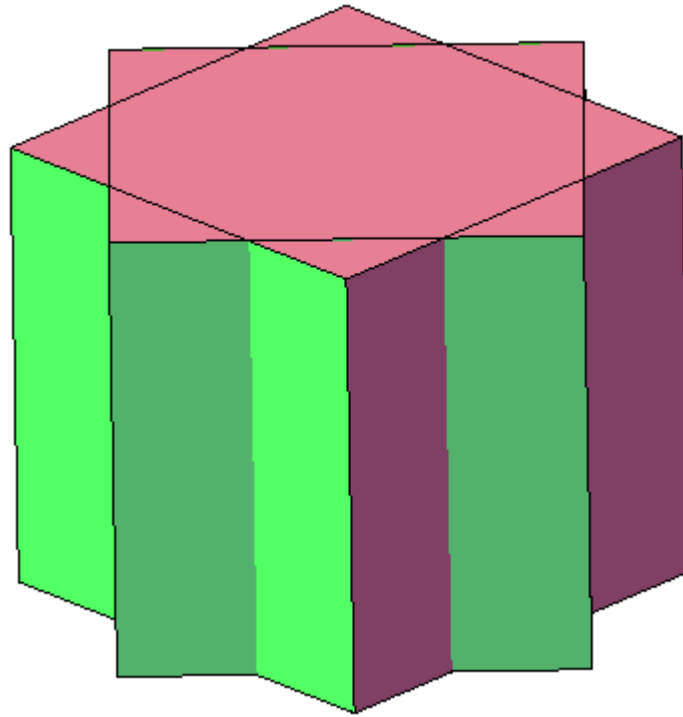
Тетраэдр повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол  $90^\circ$ . Какая фигура является объединением и пересечением исходного тетраэдра и повернутого?



**Ответ:** Звезда Кеплера, октаэдр.

## Упражнение 25

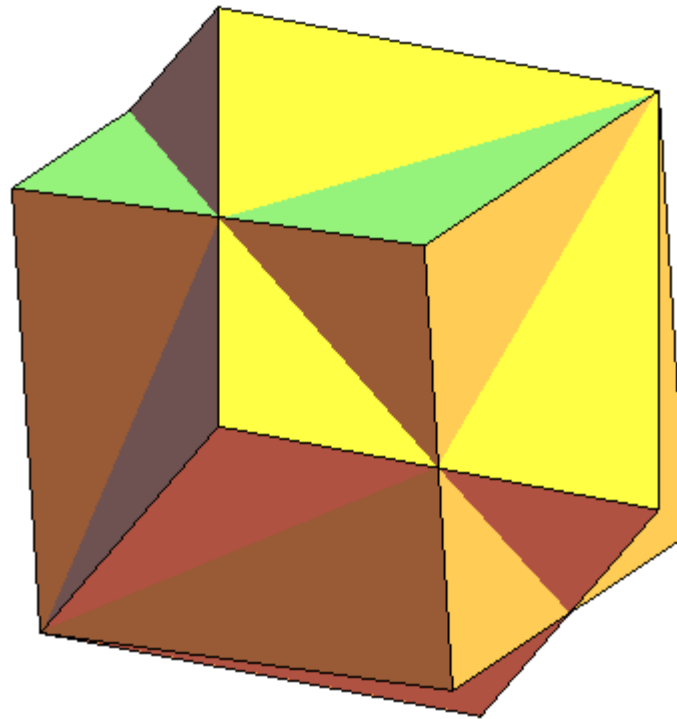
Куб повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



Ответ: Правильная 8-я призма.

## Упражнение 26

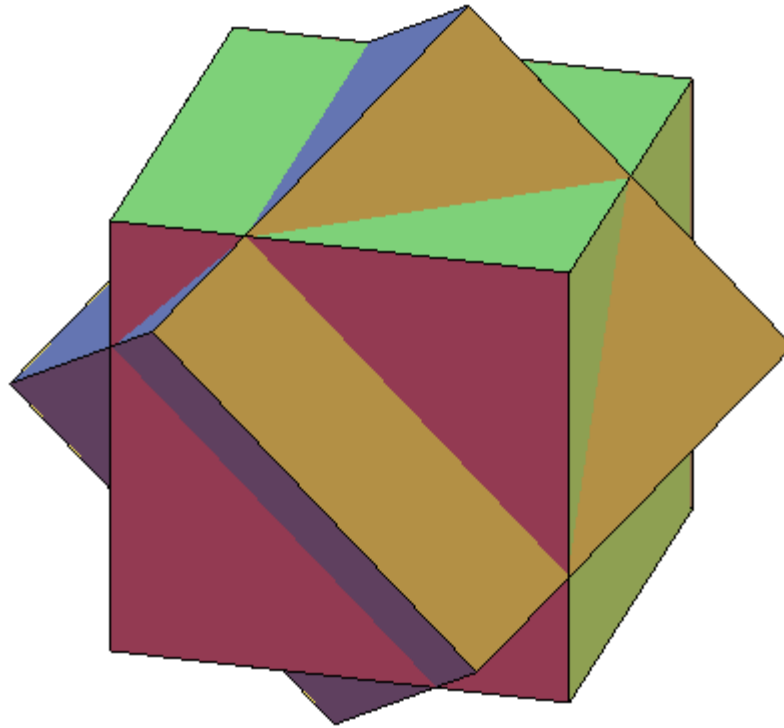
Куб повернут вокруг диагонали на угол  $60^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



**Ответ:** Правильная 6-я бипирамида.

## Упражнение 27

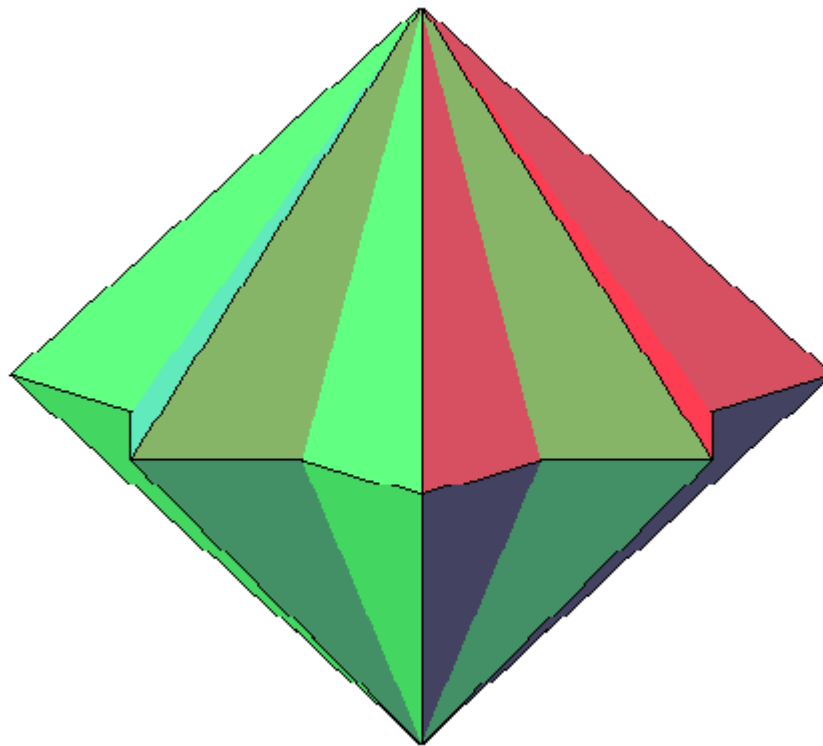
Куб повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол  $90^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



**Ответ:** Две правильные 4-е пирамиды, поставленные на основания правильной 4-ой призмы.

## Упражнение 28

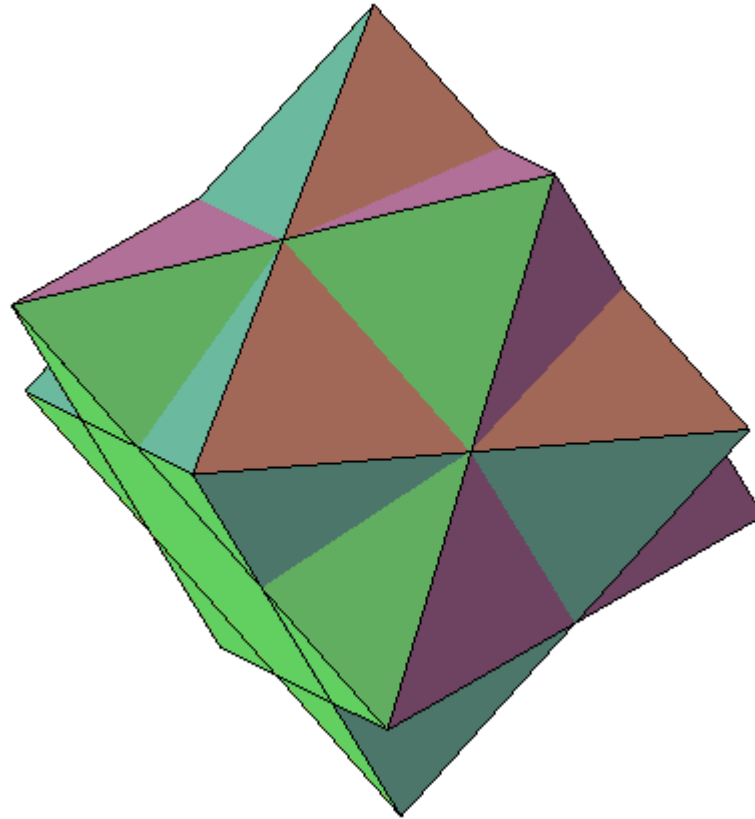
Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?



**Ответ:** Правильная 8-я бипирамида.

## Упражнение 29

Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол  $60^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?



**Ответ:** Правильная усеченная 6-я бипирамида.