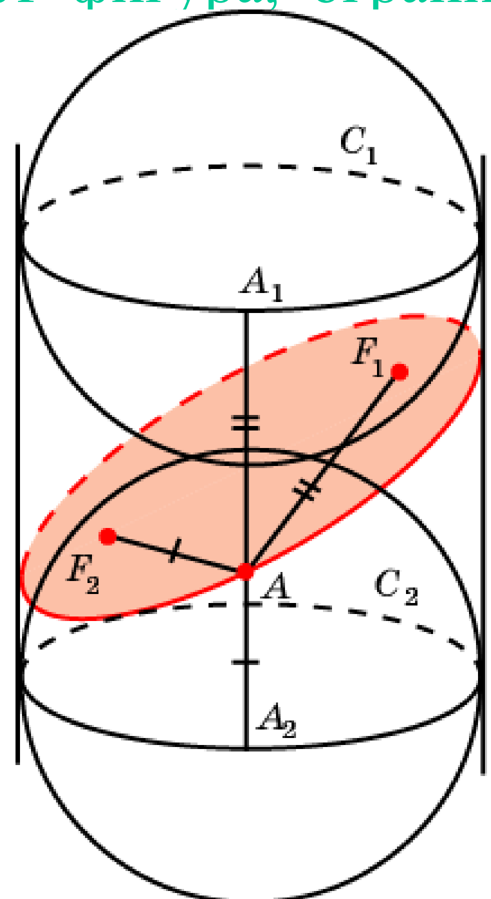
СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЬЮ

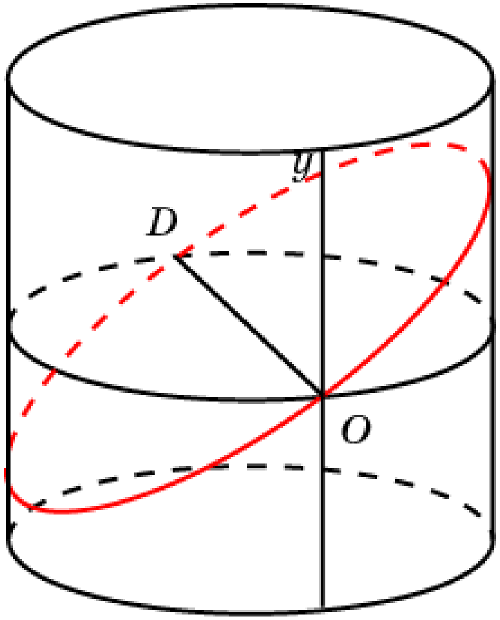
Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию. Если же плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

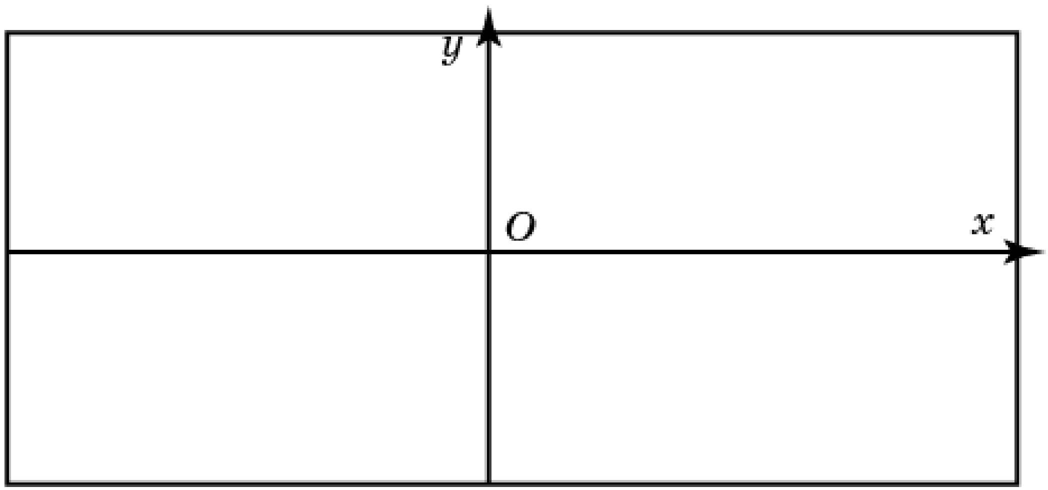
Теорема (фокальное свойство эллипса). Внутри эллипса существуют такие точки F_1 и F_2, называемые фокусами эллипса, что сумма расстояний от любой точки A эллипса до этих точек есть величина постоянная.



СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА

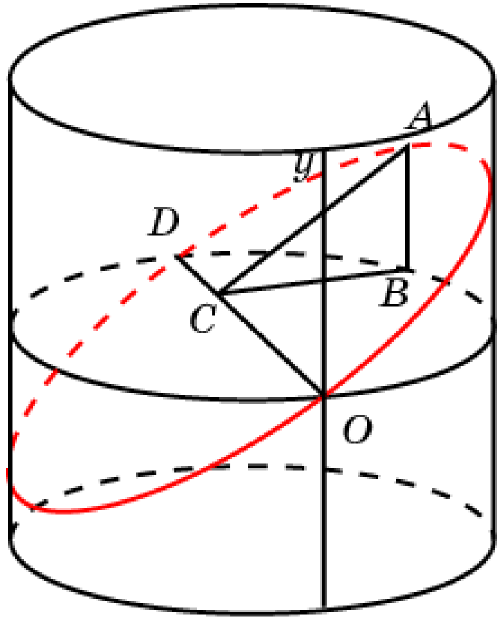
Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам. Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра. Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 45°. В этом случае сечением будет эллипс. Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. Выясним, в какую кривую развернется эллипс.

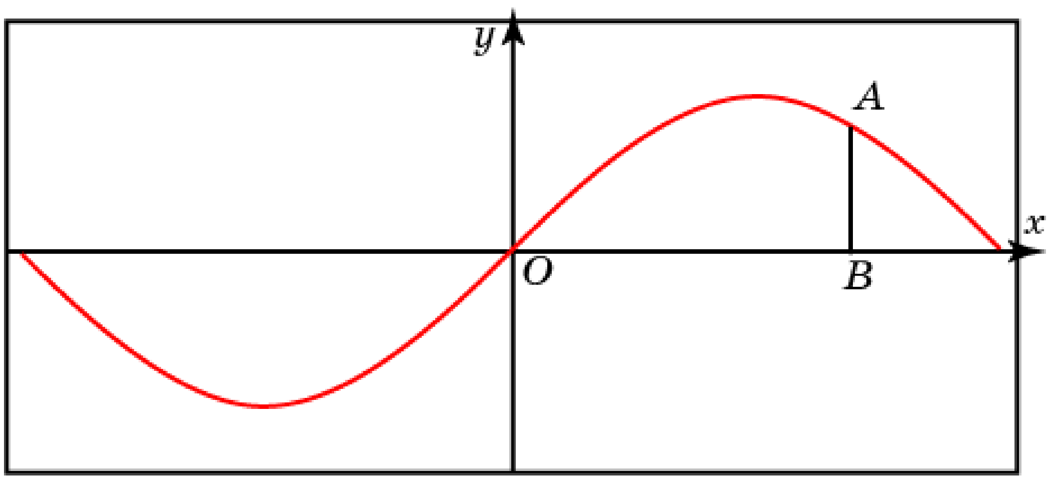




СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА

Докажем, что эллипс развернется в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для этого из произвольной точки A на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 45°$. Следовательно, $AB = BC$. Заметим, что $BC = \sin x$, где x - длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рисунку и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$, где $x = OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y = \sin x$.





Упражнение 1

Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклоненном стакане?

Ответ: Форму эллипса.

Упражнение 2

Какую форму имеет сечение боковой поверхности наклонного цилиндра, не параллельное основанию?

Ответ: Форму эллипса.

Упражнение 3

Цилиндр радиуса 1 пересечен плоскостью, составляющей угол 45^{o} с плоскостью основания. Найдите малую и большую ось эллипса, получившегося в сечении.

Ответ: 1, $\sqrt{2}$.

Упражнение 4

В основании цилиндра круг радиуса R. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол φ .

Ответ: $\dfrac{\pi R^2}{\cos\varphi}$.

Упражнение 5

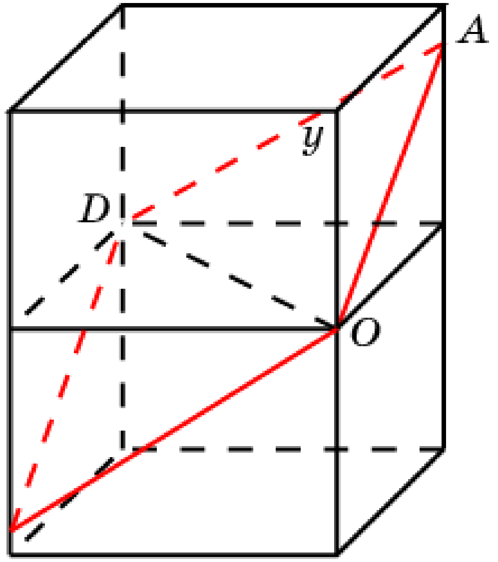
Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам. Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра. Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол φ . Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. Выясните, в какую кривую развернется эллипс.

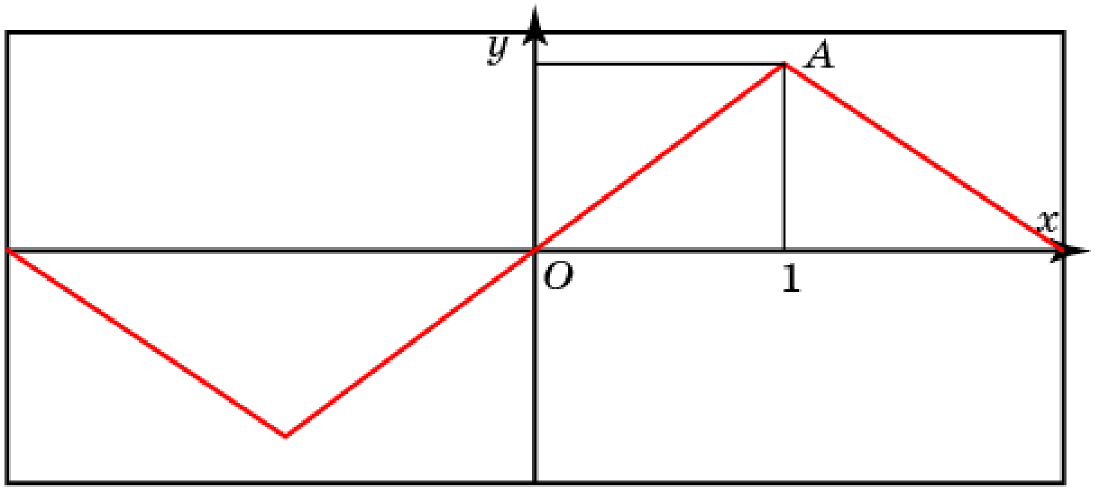
Ответ: $y = k \cdot \sin x$, где $k = \mathrm{tg}\, \varphi$.

Упражнение 6

Возьмем прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат. Свернем этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы. Сторону основания призмы примем за 1. Через точки *O* и *D* проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45°. Развернем лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая?

Какие координаты имеет точка *A*?

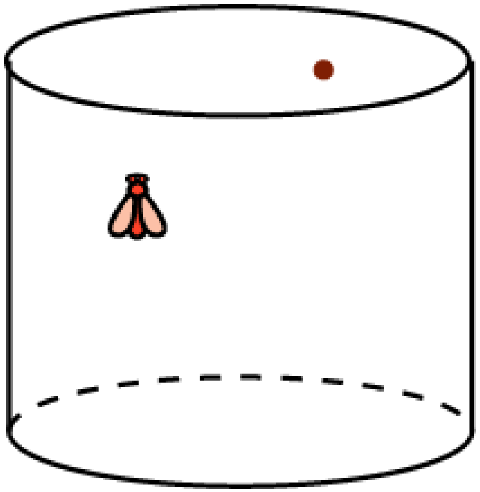




Ответ: $A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Упражнение 7

На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки в трех см от верхнего края виднеется капля меда. А на наружной стенке в диаметрально противоположной точке уселась муха. Чему равен кратчайший путь, по которому муха может доползти до медовой капли? Диаметр банки 12 см.



Ответ: $6\sqrt{\pi^2+1}$ см.