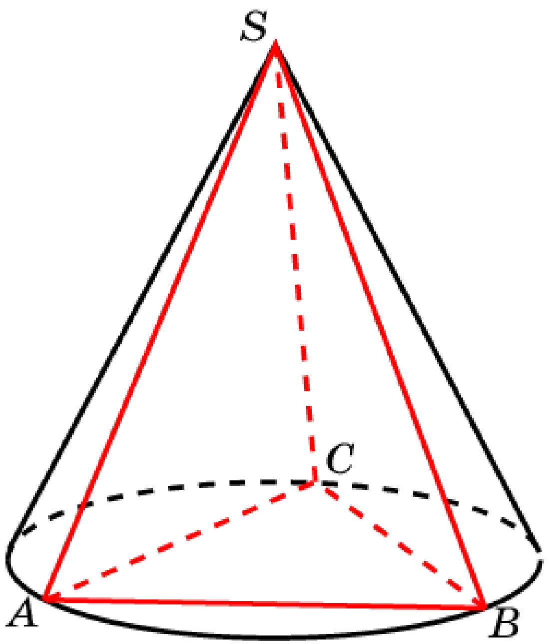
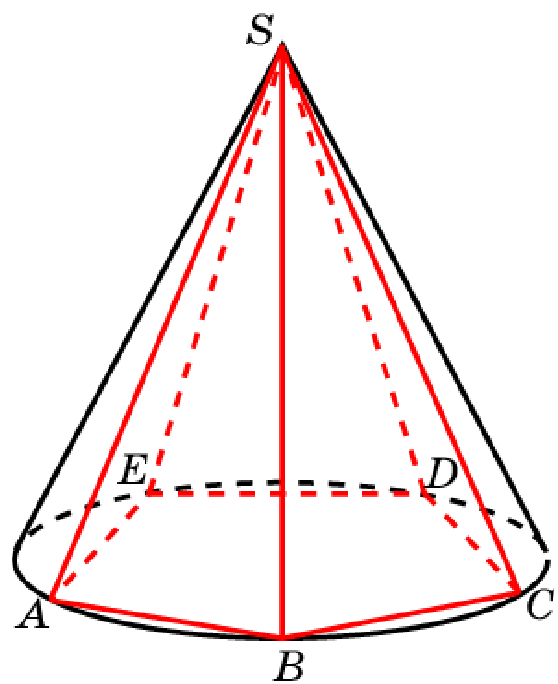
Пирамида, вписанная в конус

Пирамида называется вписанной в конус, если ее основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется описанным около пирамиды.

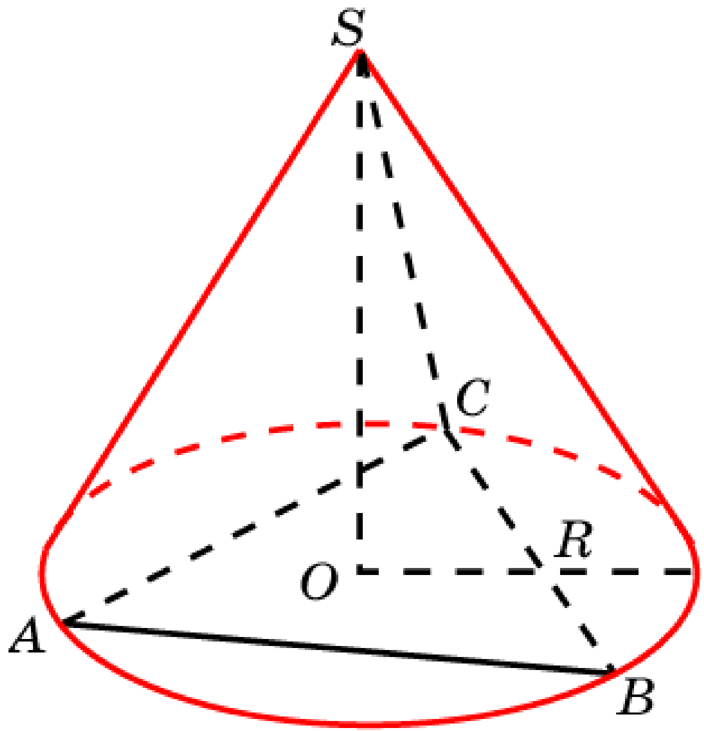
Около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.





Упражнение 1

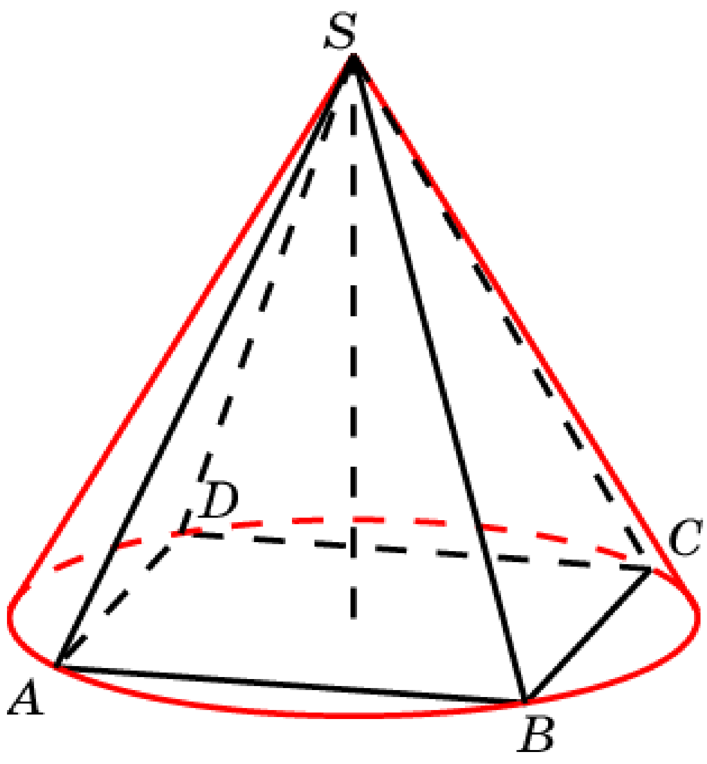
Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнение 2

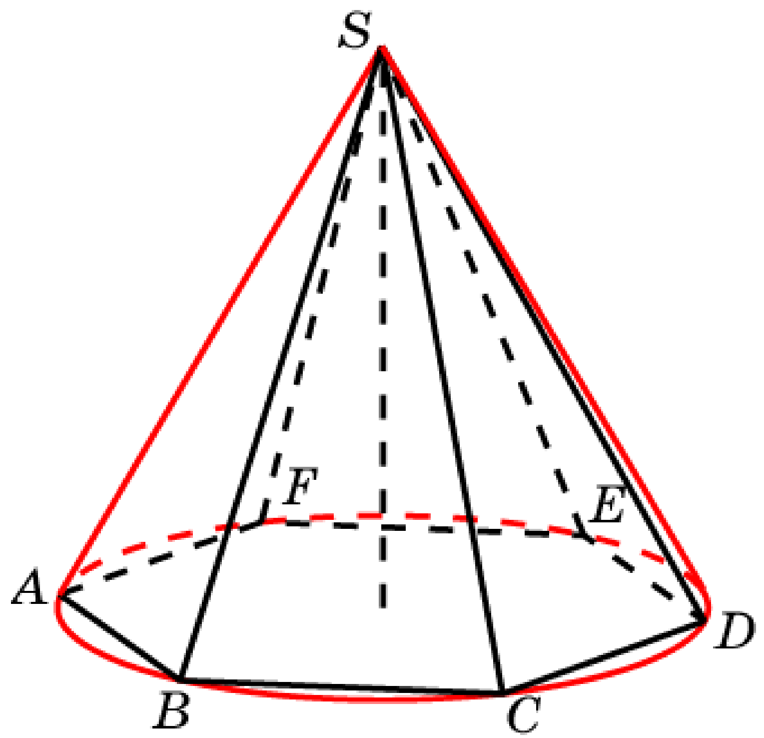
Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 3

Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус, радиус основания которого равен 1.

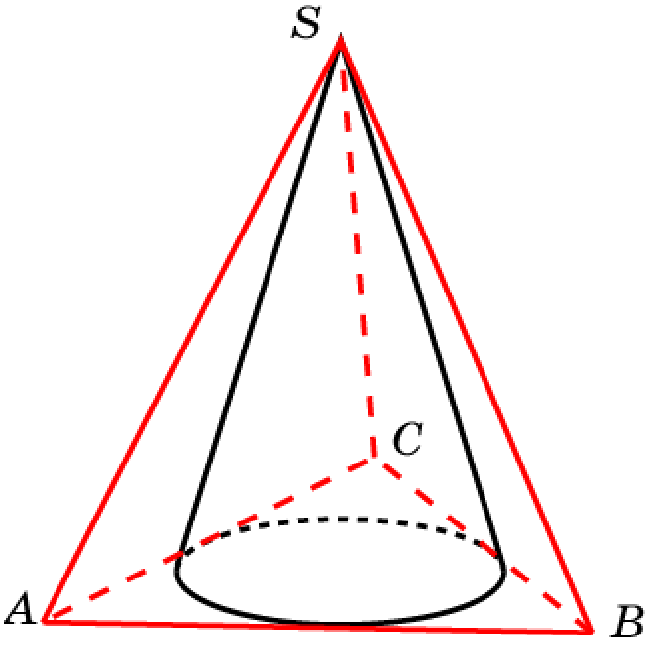


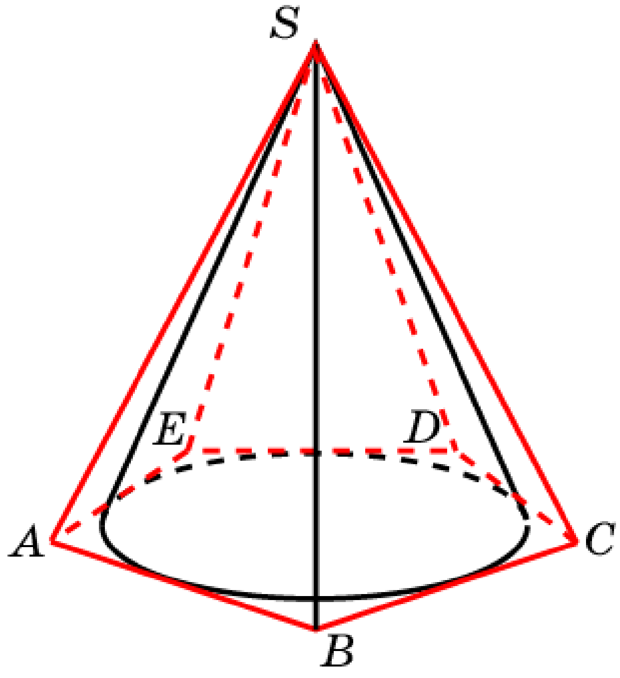
Ответ: 1.

Пирамида, описанная около конуса

Пирамида называется описанной около конуса, если ее основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус называется вписанным в пирамиду.

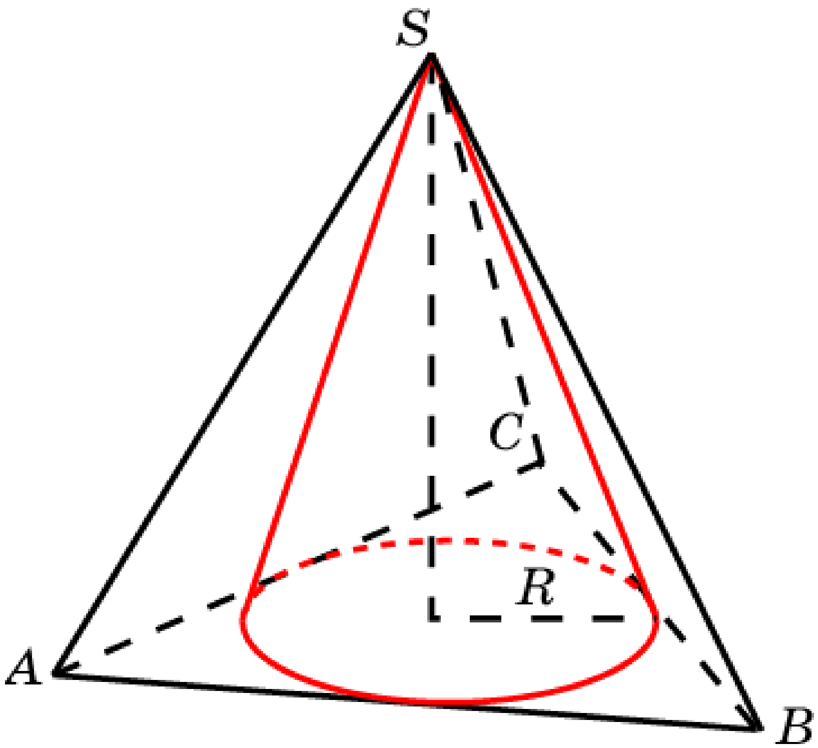
В пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда в ее основание можно вписать окружность.





Упражнение 1

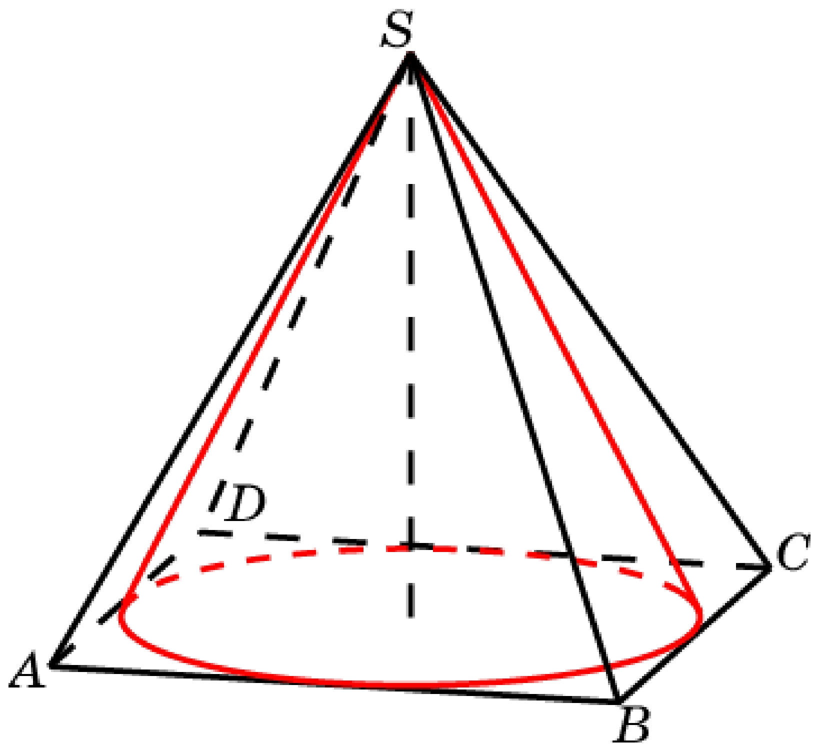
Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



Ответ: $2\sqrt{3}$.

Упражнение 2

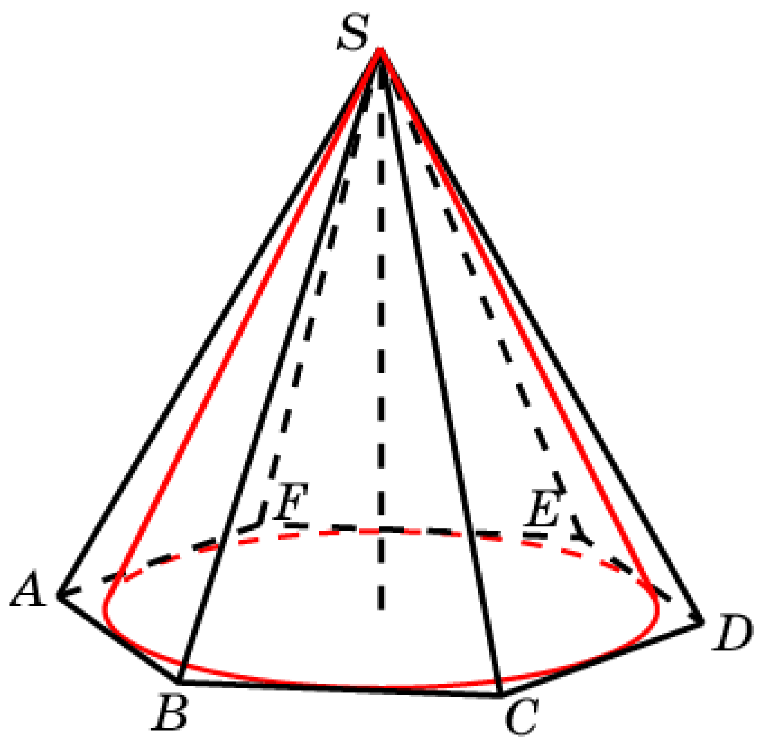
Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



Ответ: 2.

Упражнение 3

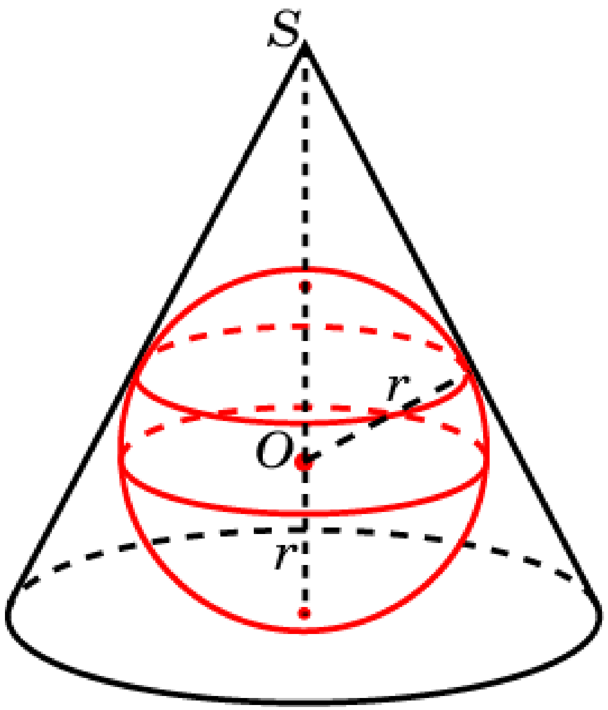
Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, описанной около конуса, радиус основания которого равен 1.



Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Сфера, вписанная в конус

Сфера называется вписанной в конус, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом конус называется описанным около сферы.



В любой конус (прямой, круговой) можно вписать сферу. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

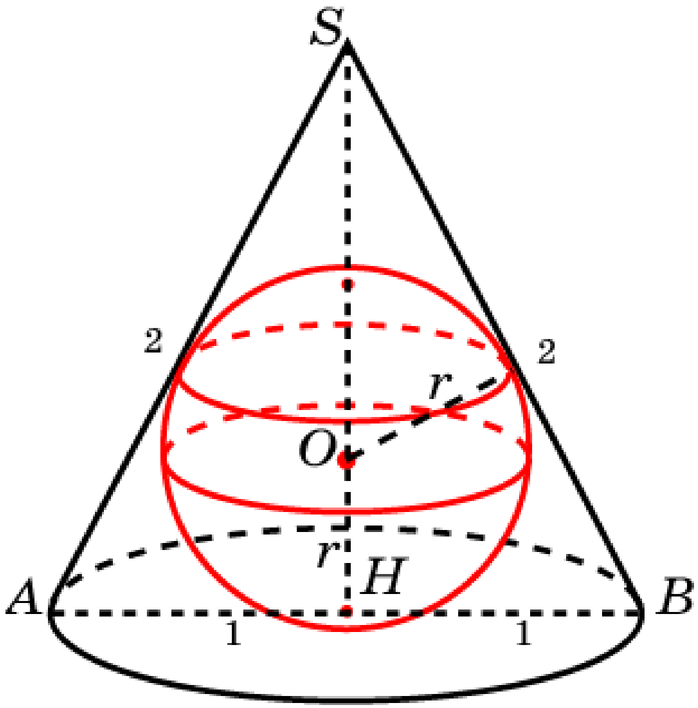
Напомним, что радиус r окружности, вписанный в треугольник, находится по формуле

$$r = \frac{S}{p},$$

где S – площадь, p – полупериметр треугольника.

Упражнение 1

В конус, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, вписана сфера. Найдите ее радиус.

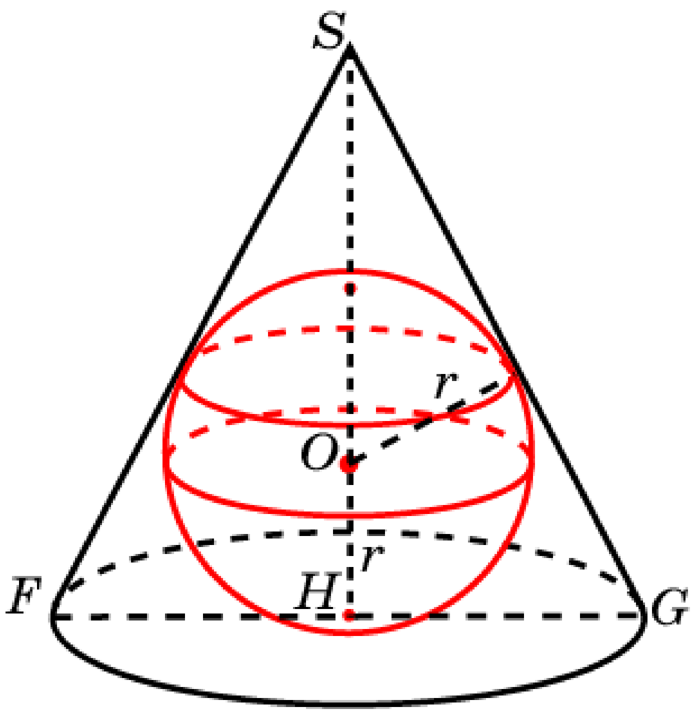


Решение. Треугольник SAB равносторонний. Высота SH равна $\sqrt{3}$. Площадь S равна $\sqrt{3}$. Полупериметр p равен 3. По формуле $r = S/p$ получаем

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнение 2

В конус, радиус основания которого равен 2, вписана сфера радиуса 1. Найдите высоту конуса.



Решение. Обозначим h высоту SH конуса. Из формулы $r = S/p$ имеем:

$$h = \frac{2rp}{a},$$

где $r = 1$, $a = FG = 4$, $p = 2+\sqrt{4+h^2}$.

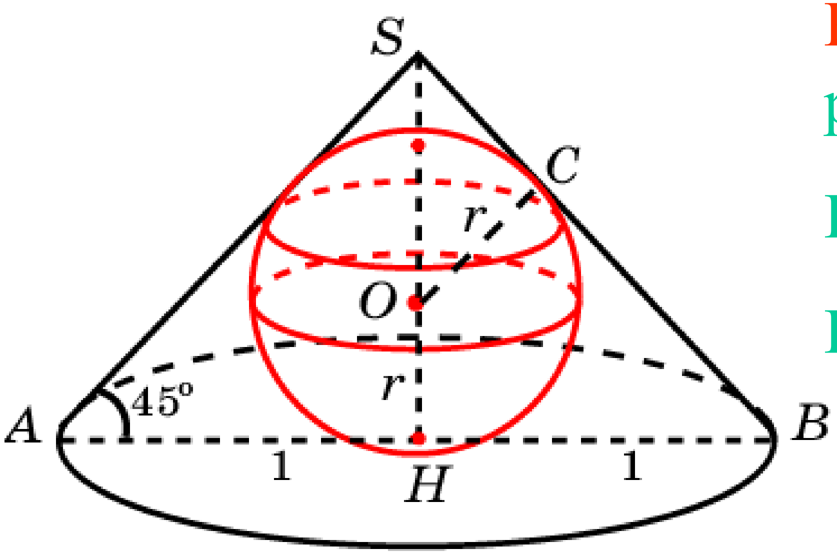
Решая уравнение $2h = 2+\sqrt{4+h^2}$,

находим

$$h = \frac{8}{3}.$$

Упражнение 3

Радиус основания конуса равен 1. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус вписанной сферы.



Решение. Высота *SH* конуса равна 1. Образующая $\sqrt{2}$

Полупериметр *p* равен $1+\sqrt{2}$.

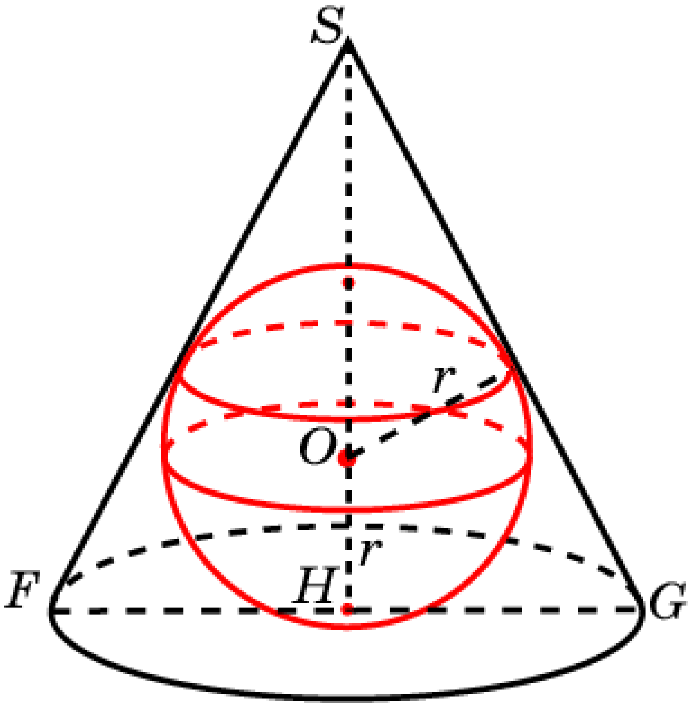
По формуле *r* = *S*/*p*, имеем

$$r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Ответ: $r = \sqrt{2} - 1$.

Упражнение 4

Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус вписанной сферы.

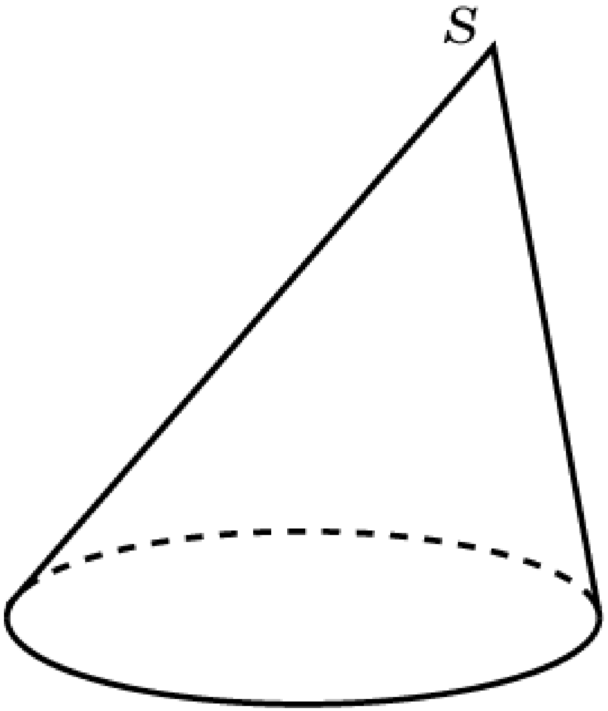


Решение. Радиус основания конуса равен 6. Площадь треугольника *SFG* равна 48, полупериметр 16. По формуле $r = S/p$ имеем $r = 3$.

Ответ: $r = 3$.

Упражнение 5

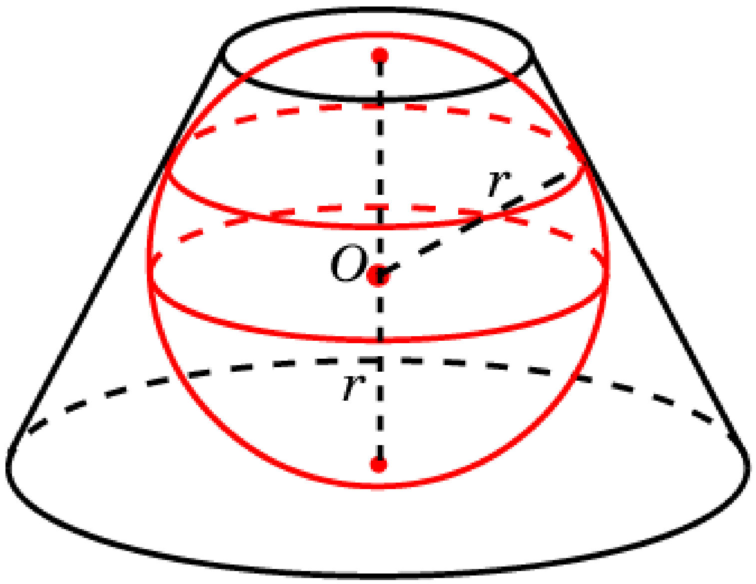
Можно ли вписать сферу в наклонный конус?



Ответ: Нет.

Сфера, вписанная в усеченный конус

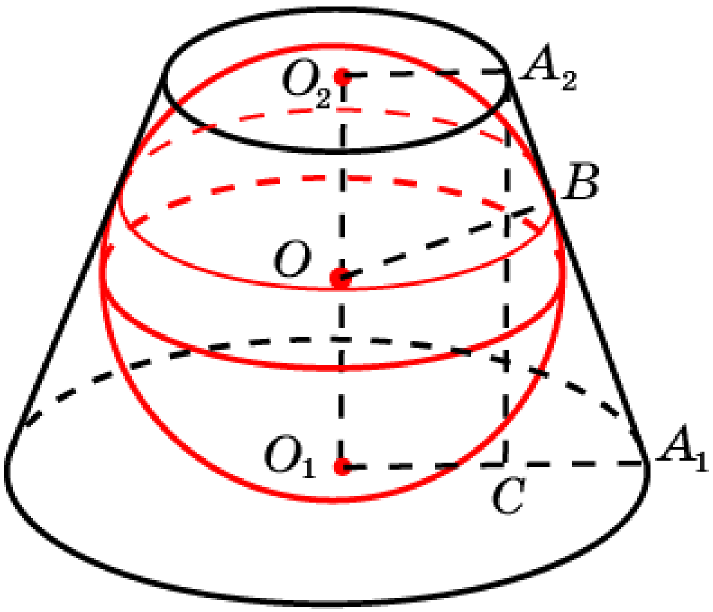
Сфера называется вписанной в усеченный конус, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом усеченный конус называется описанным около сферы.



В усеченный конус можно вписать сферу, если в его осевое сечение можно вписать окружность. Радиус этой окружности будет равен радиусу вписанной сферы.

Упражнение 1

В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту усеченного конуса.



Решение. Имеем: $A_1B = A_1O_1 = 2$, $A_2B = A_2O_2 = 1$. Следовательно, $A_1A_2 = 3$, $A_1C = 1$.

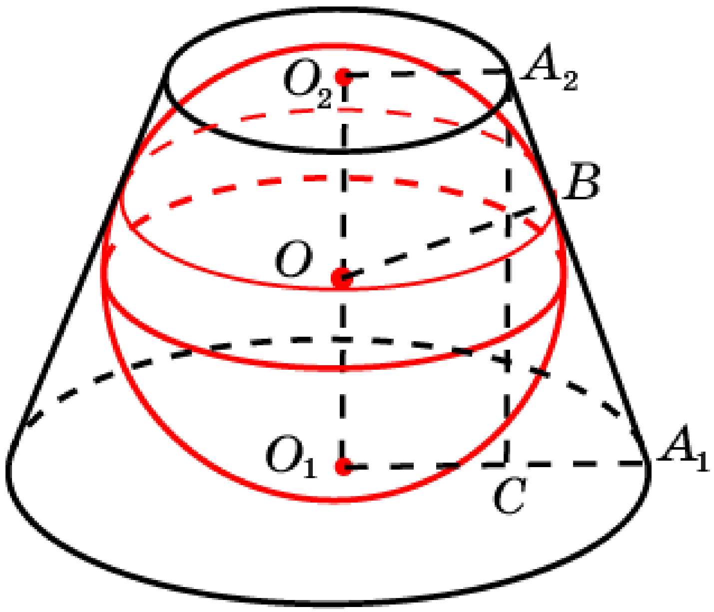
$$O_1O_2 = A_2C = \sqrt{A_1A_2^{\,2} - A_1C^2} = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$r = \sqrt{2},\ h = 2\sqrt{2}.$$

Упражнение 2

В усеченный конус, радиус одного основания которого равен 2, вписана сфера радиуса 1. Найдите радиус второго основания.

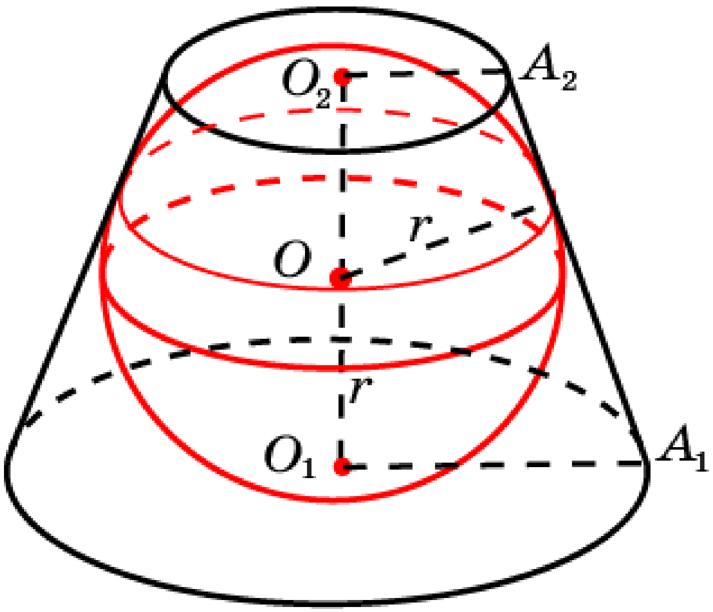


Решение. Пусть $A_1O_1 = 2$. Обозначим $r = A_2O_2$. Имеем: $A_1A_2 = 2+r$, $A_1C = 2 - r$. По теореме Пифагора, имеет место равенство $O_1O_2^{\;2} = A_1A_2^{\;2} - A_1C^2$, из которого следует, что выполняется равенство $4 = (r+2)^2 - (2-r)^2$. Решая полученное уравнение относительно r, находим

$$r = \frac{1}{2}.$$

Упражнение 3

В усеченном конусе радиус большего основания равен 2, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите радиус вписанной сферы.

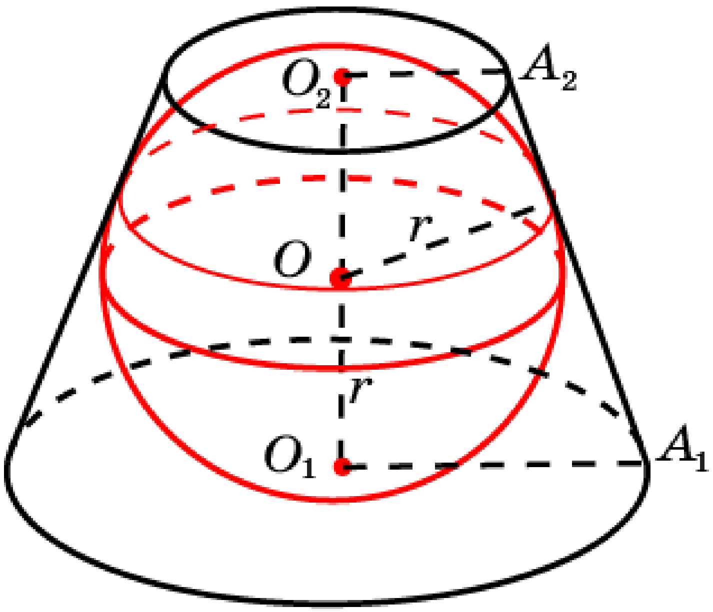


Решение. Заметим, что осевым сечением конуса, из которого получен усеченный конус, является равносторонний треугольник со стороной 2. Радиус *r* сферы, вписанной в усеченный конус, равен радиусу окружности, вписанной в этот равносторонний треугольник, т.е.

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнение 4

Образующая усеченного конуса равна 2, площадь осевого сечения 3. Найдите радиус вписанной сферы.

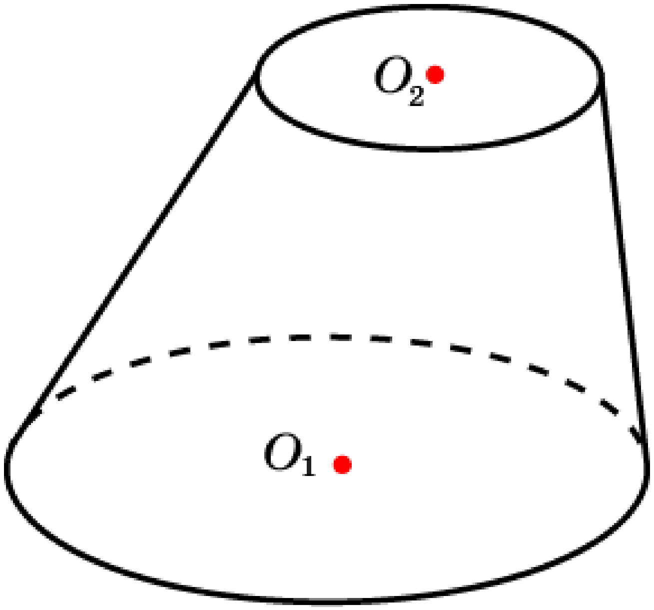


Решение. Воспользуемся формулой $r = S/p$, где S – площадь осевого сечения, p – полупериметр. В нашем случае $S = 3$. Для нахождения полупериметра напомним, что для четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны. Значит, полупериметр равен удвоенной образующей цилиндра, т.е. $p = 4$. Следовательно, $r = 3/4$.

Ответ: $r = \frac{3}{4}$.

Упражнение 5

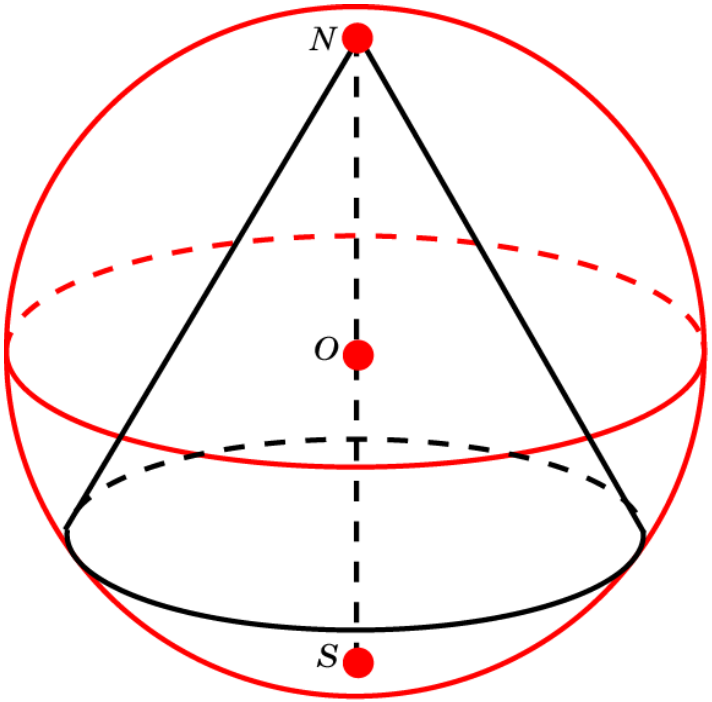
Можно ли вписать сферу в усеченный наклонный конус.



Ответ: Нет.

Сфера, описанная около конуса

Сфера называется описанной около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом конус называется вписанным в сферу.



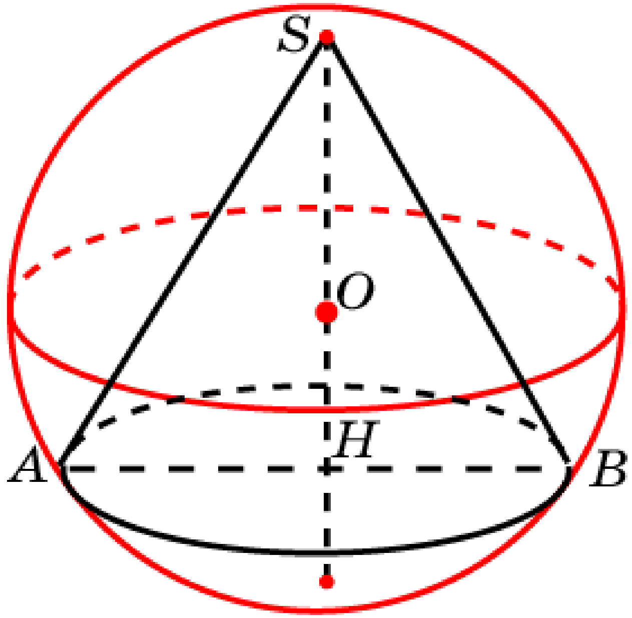
Около любого конуса (прямого, кругового) можно описать сферу. Ее центр находится на высоте конуса, а радиус равен радиусу окружности, описанной около треугольника, являющимся осевым сечением конуса.

Напомним, что радиус R окружности, описанной около треугольника, находится по формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$,

где S – площадь, a, b, c – стороны треугольника.

Упражнение 1

Около конуса, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, описана сфера. Найдите ее радиус.

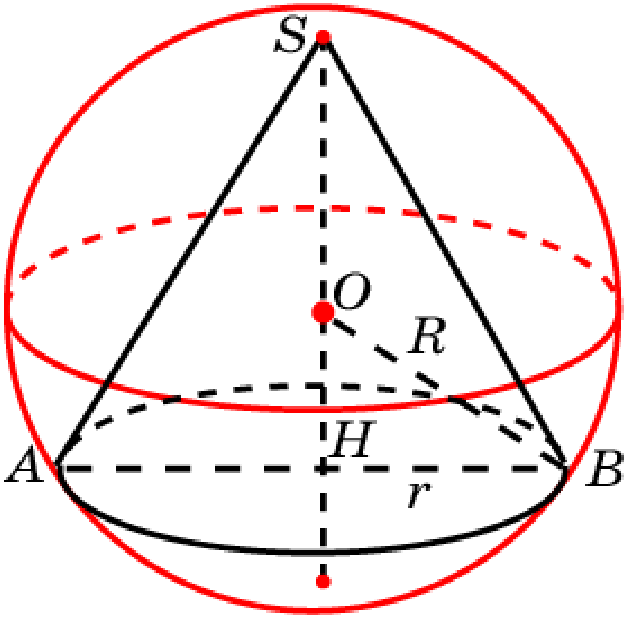


Решение. Треугольник SAB равносторонний со стороной 2. Высота SH равна $\sqrt{3}$. Площадь S равна $\sqrt{3}$. По формуле $R = abc/4S$ получаем

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнение 2

Около конуса, радиус основания которого равен 4, описана сфера радиуса 5. Найдите высоту h конуса.

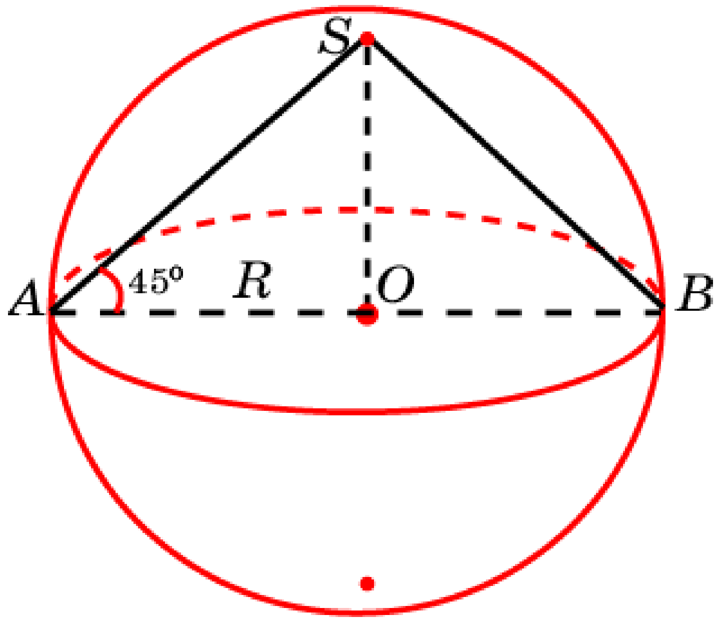


Решение. Имеем, $OB = 5$, $HB = 4$. Следовательно, $OH = 3$. Учитывая, что $SO = OB = 5$, получаем $h = 8$.

Ответ: $h = 8$.

Упражнение 3

Радиус основания конуса равен 1. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите радиус описанной сферы.

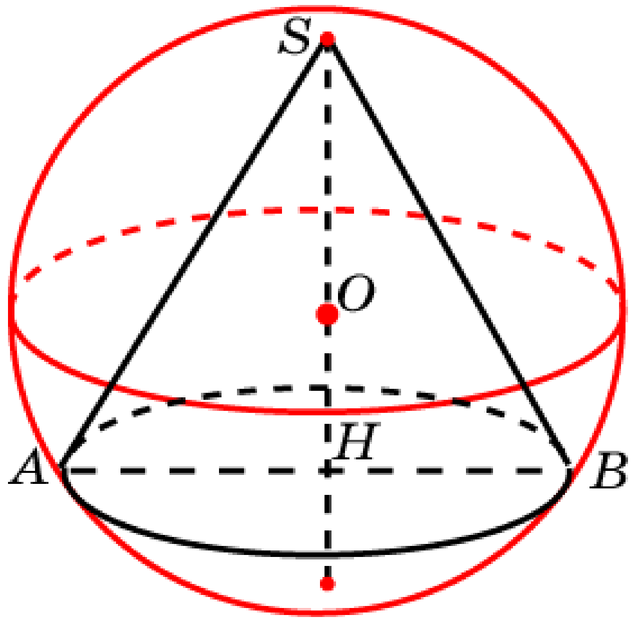


Решение. Треугольник *SAB* – прямоугольный, равнобедренный. Следовательно, радиус *R* описанной сферы равен радиусу основания цилиндра, т.е. $R = 1$.

Ответ: $R = 1$.

Упражнение 4

Высота конуса равна 8, образующая 10. Найдите радиус описанной сферы.

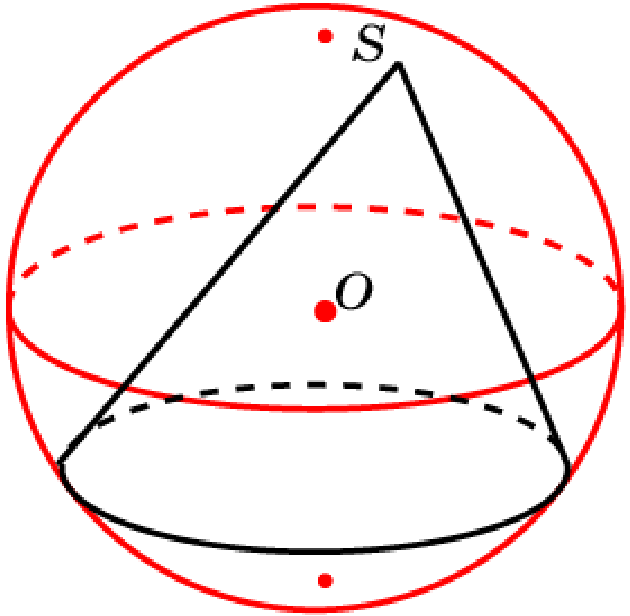


Решение. В треугольнике SAB имеем: $SA = SB = 10$, $SH = 8$. По теореме Пифагора, $AH = 6$ и, следовательно, $S = 48$. Используя формулу $R = abc/4S$, получаем

$$R = \frac{25}{6}.$$

Упражнение 5

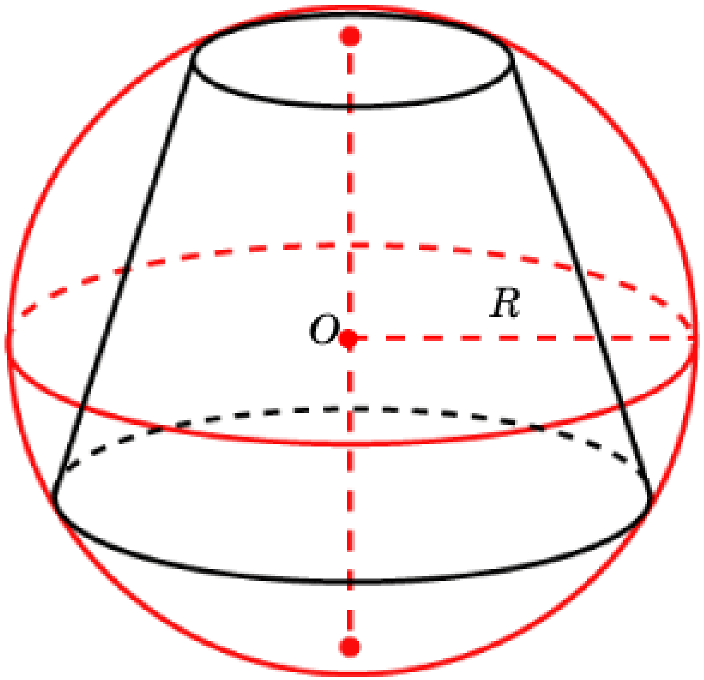
Можно ли описать сферу около наклонного конуса?



Ответ: Да.

Сфера, описанная около усеченного конуса

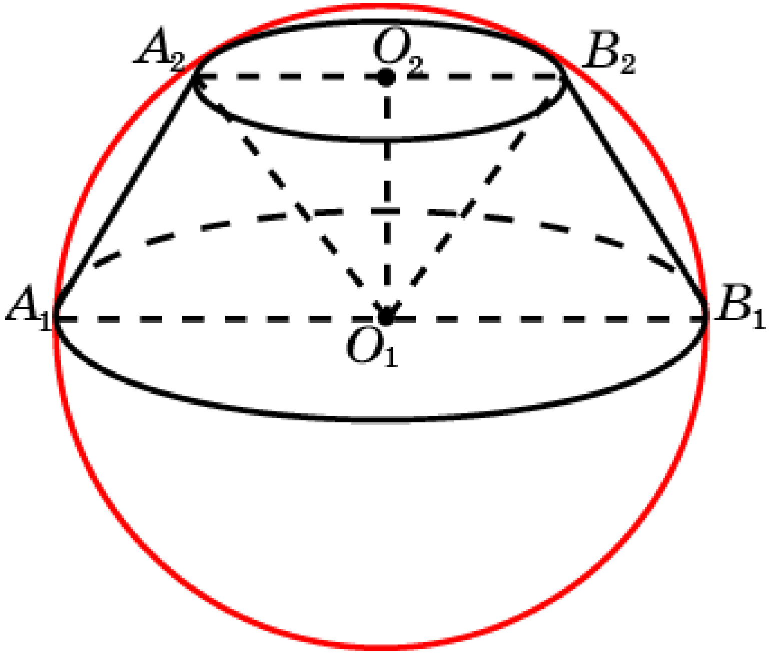
Сфера называется описанной около усеченного конуса, если окружности оснований усеченного конуса лежат на сфере. При этом усеченный конус называется вписанным в сферу.



Около усеченного конуса можно описать сферу, если около его осевого сечения можно описать окружность. Радиус этой окружности будет равен радиусу описанной сферы.

Упражнение 1

Около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 и 1, а образующая равна 2, описана сфера. Найдите ее радиус.

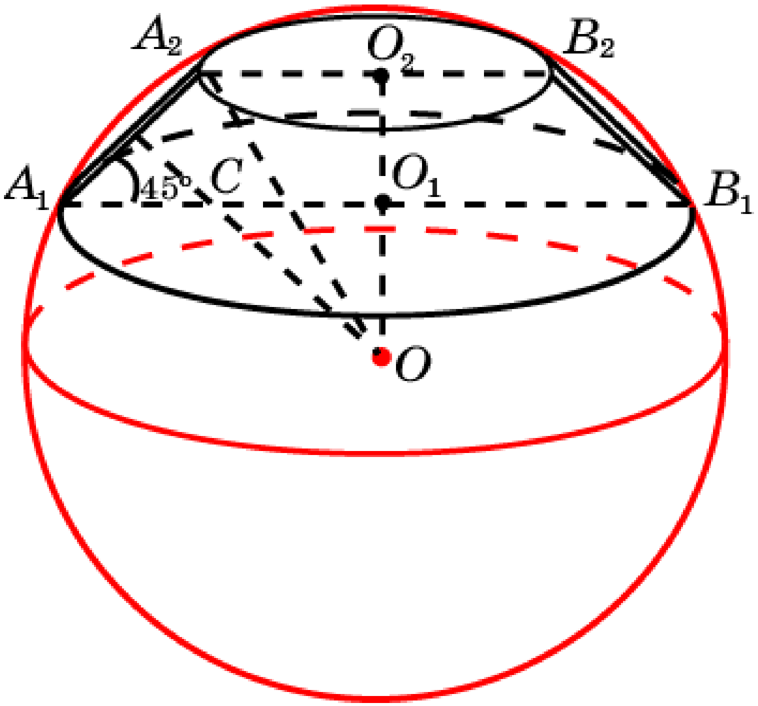


Решение. Заметим, что $A_1O_1B_2O_2$ и $O_1B_1B_2A_2$ – ромбы. Треугольники $A_1O_1A_2$, $O_1A_2B_2$, $O_1B_1B_2$ – равносторонние и, значит, A_1B_1 – диаметр. Следовательно, R =2.

Ответ: R = 2,

Упражнение 2

Радиус меньшего основания усеченного конуса равен 1, образующая равна 2 и составляет угол 45° с плоскостью другого основания. Найдите радиус описанной сферы.

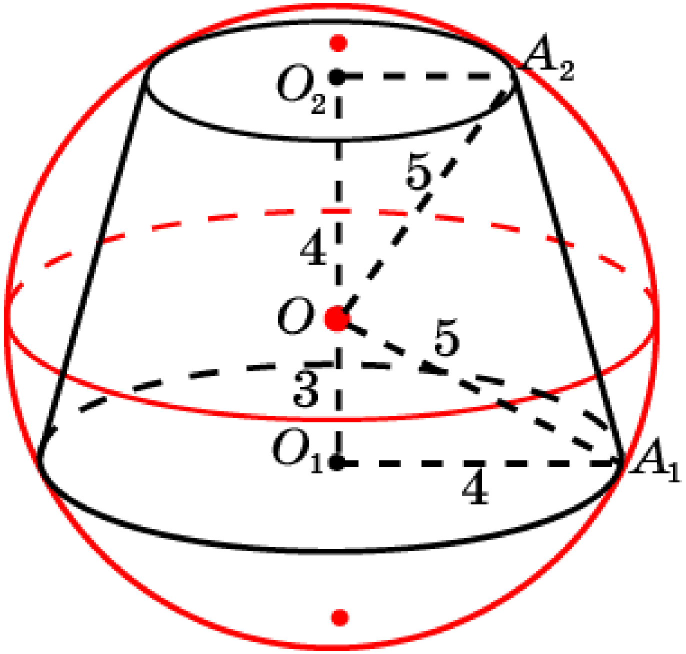


Решение. Имеем $A_2O_2 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $O_1O_2 = \sqrt{2}$, $OO_1 = O_1C = 1$. Следовательно, $OO_2 = 1 + \sqrt{2}$ и, значит,

$$R = AO_2 = \sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

Упражнение 3

Радиус одного основания усеченного конуса равен 4, высота 7, радиус описанной сферы 5. Найдите радиус второго основания усеченного конуса.

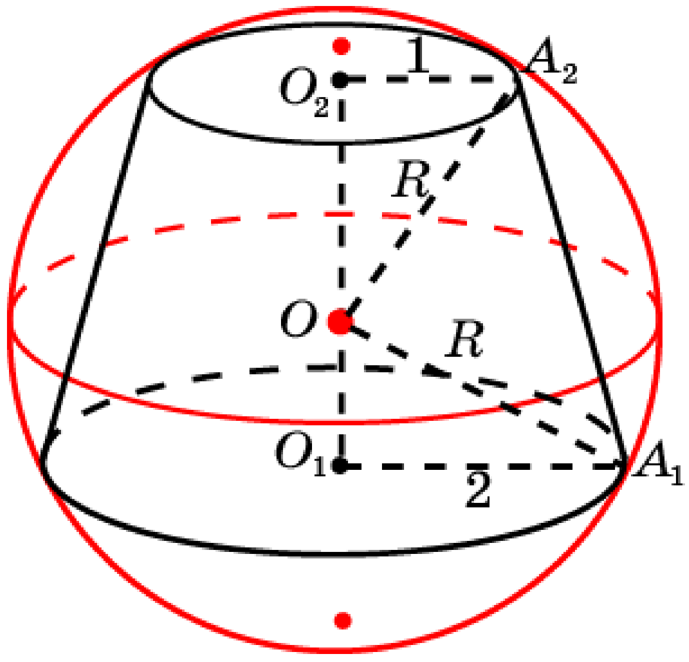


Решение. Имеем $OO_1 = 3$, $OO_2 = 4$ и, следовательно, $O_2A_2 = 3$.

Ответ: 3.

Упражнение 4

Найдите радиус сферы, описанной около усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 2 и 4, а высота равна 5.



Решение. Обозначим R радиус описанной сферы. Тогда

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - 4}, OO_2 = \sqrt{R^2 - 1}.$$

Учитывая, что $O_1O_2 = 6$, имеем равенство

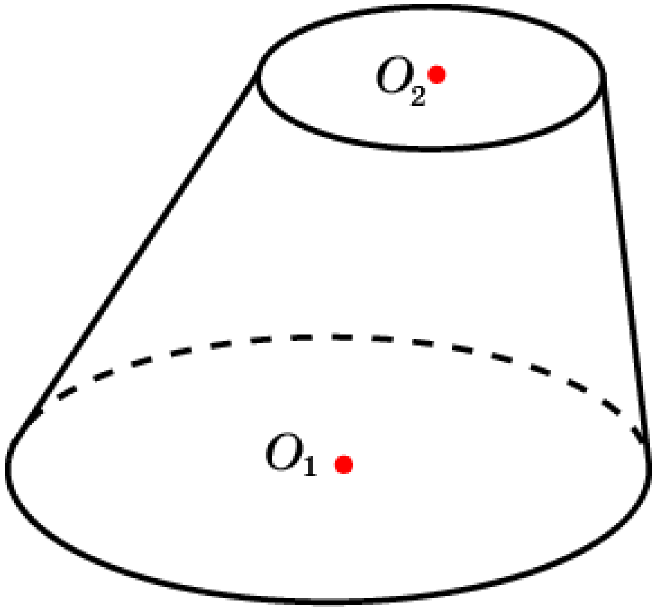
$$5 = \sqrt{R^2 - 4} + \sqrt{R^2 - 1}.$$

Решая его относительно R, находим

$$R = \frac{\sqrt{221}}{5}.$$

Упражнение 5

Можно ли описать сферу около усеченного наклонного конуса.



Ответ: Нет.