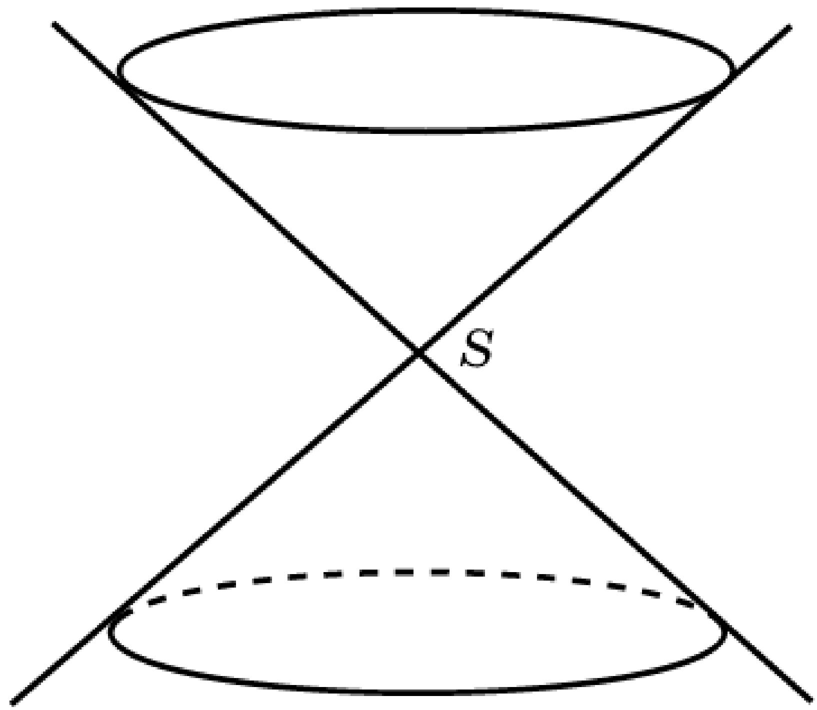
КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

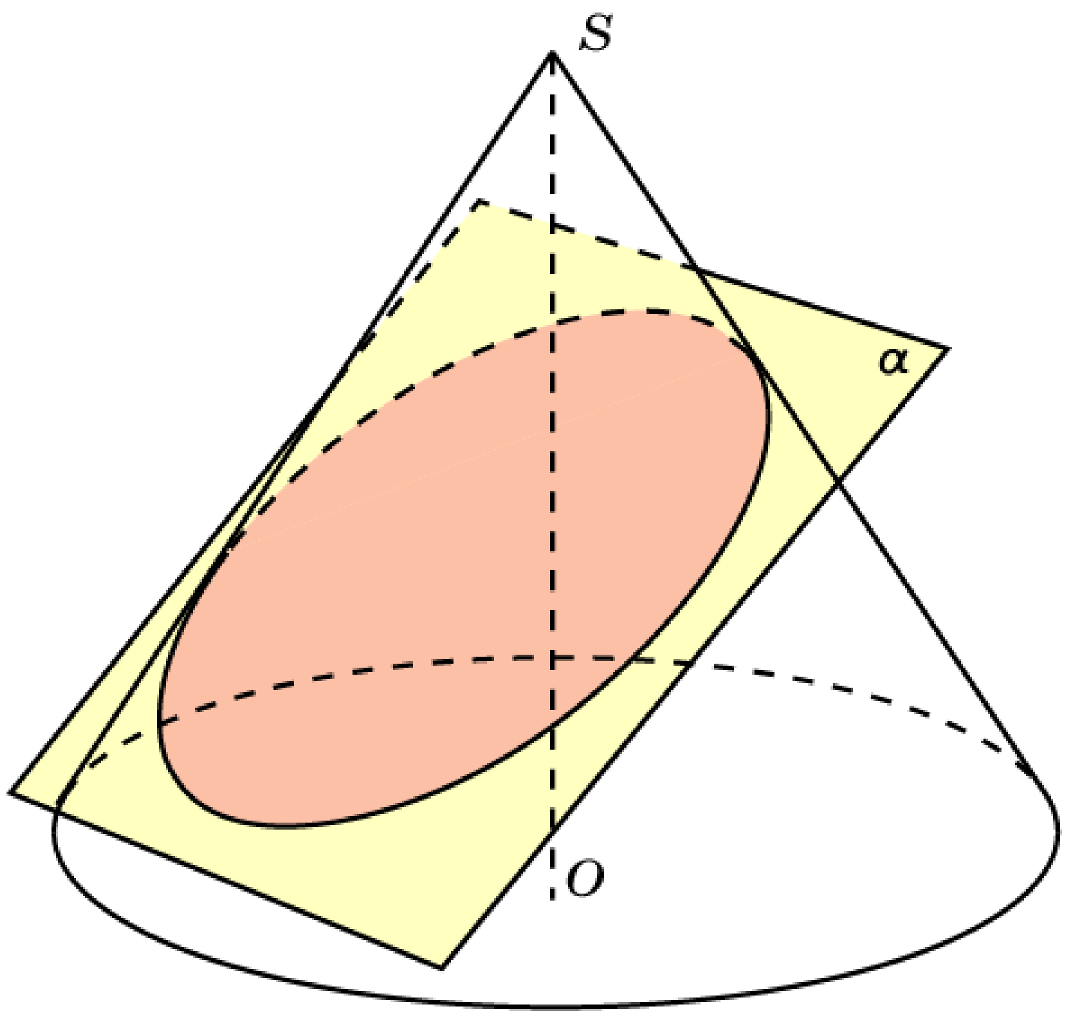
Для данного конуса рассмотрим коническую поверхность, образованную прямыми, проходящими через вершину конуса и точки окружности основания конуса.

Сечения конической поверхности плоскостью можно рассматривать как центральную проекцию окружности основания конуса на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания и не проходит через вершину конуса, то в сечении конической поверхности получается окружность.



Теорема 1

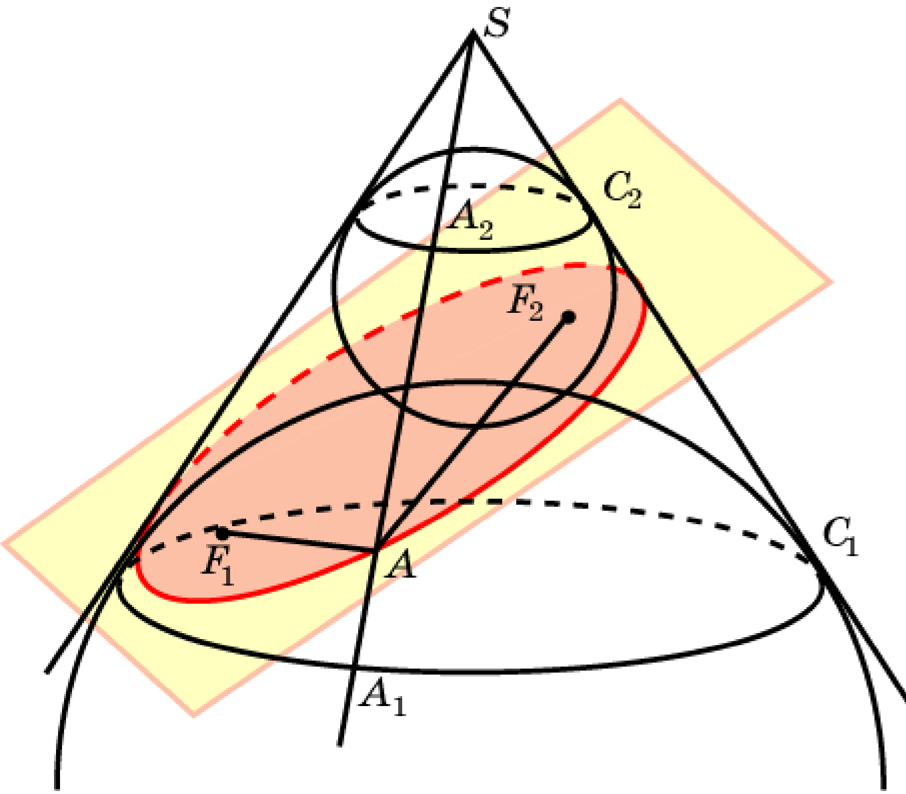
Если плоскость образует с осью конуса угол, больший, чем угол между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается эллипс.



Доказательство

Впишем в коническую поверхность две сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1, F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно.

Пусть A – произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая AS является касательной к обеим сферам.

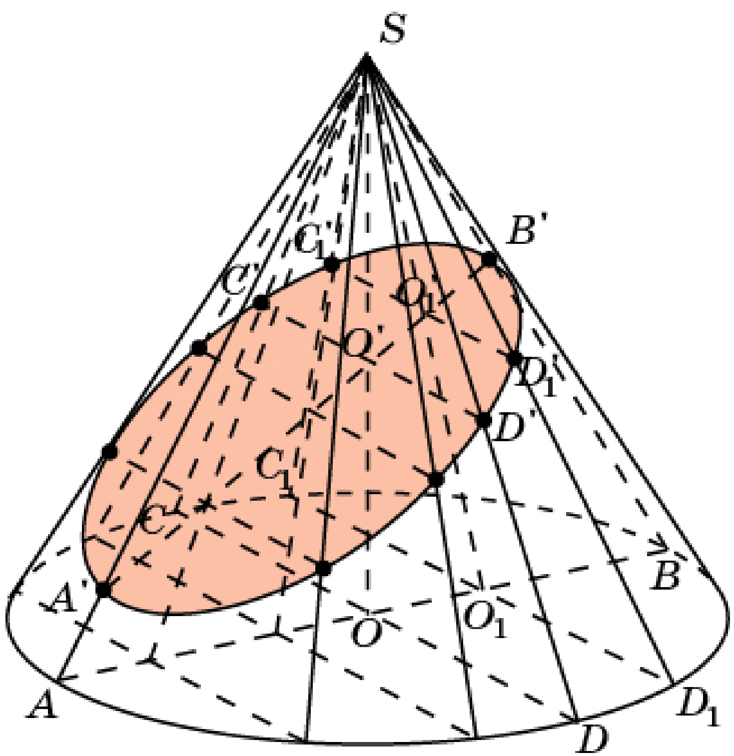


Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна образующей соответствующего усеченного конуса. Поэтому сумма расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной.

Построение сечение конуса (эллипс)

В эллипсе, изображающем основание конуса, проведем сопряженные диаметры AB и CD.

На образующих SA и SB выберем какие-нибудь точки A' и B'. Точку пересечения $A'B'$ и SO обозначим O'. Через нее проведем прямую, параллельную CD и ее точки пересечения с SC и SD обозначим C' и D' соответственно. Они будут принадлежать искомому сечению.



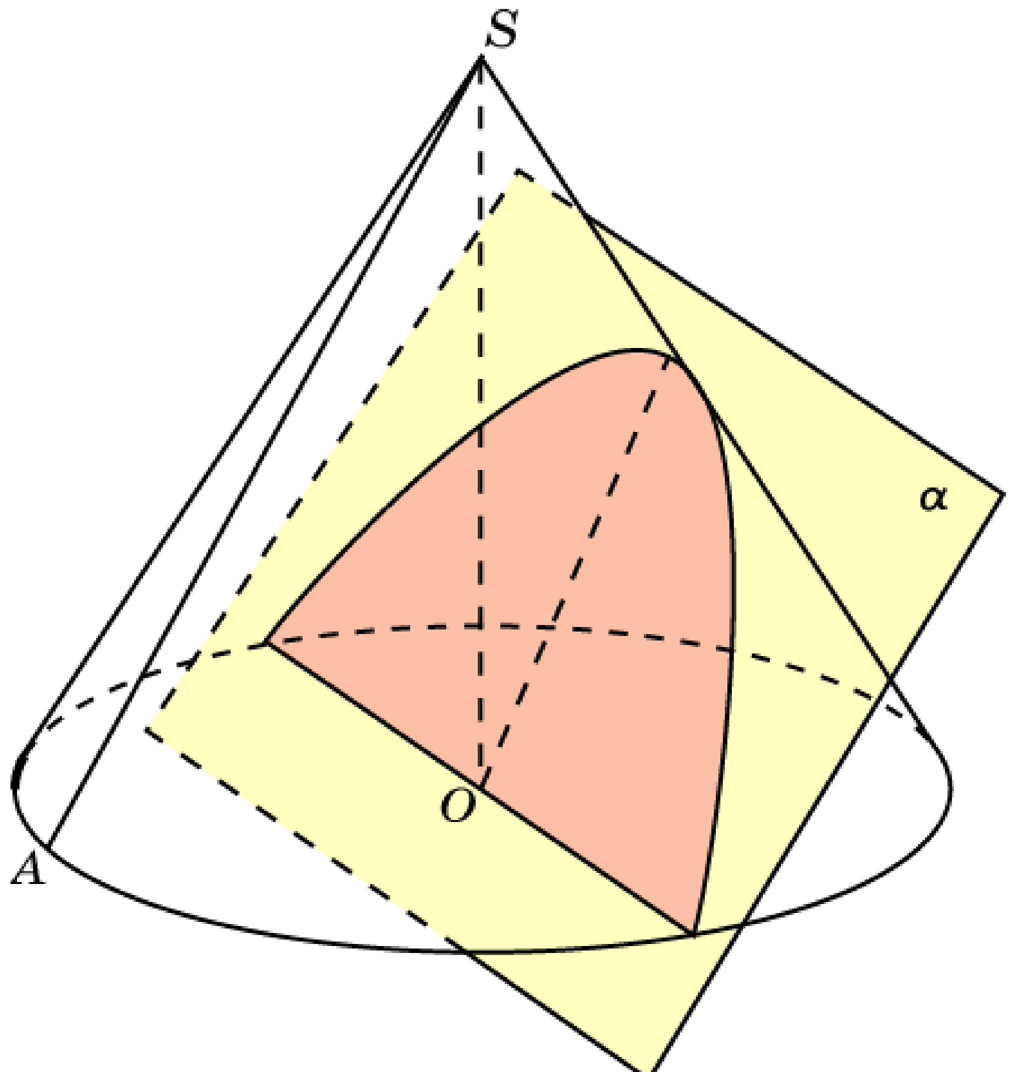
Проведем хорду C_1D_1, параллельную CD, и точку O_1 ее пересечения с AB соединим с S. Точку пересечения SO_1 и $A'B'$ обозначим O_1. Через точку O_1 проведем прямую, параллельную C_1D_1 и ее точки пересечения с SC_1 и SD_1 обозначим C'_1 и D'_1, соответственно. Они будут принадлежать искомому сечению.

Аналогичным образом построим несколько других точек.

Соединяя их плавной кривой, получим искомое сечение.

Теорема 2

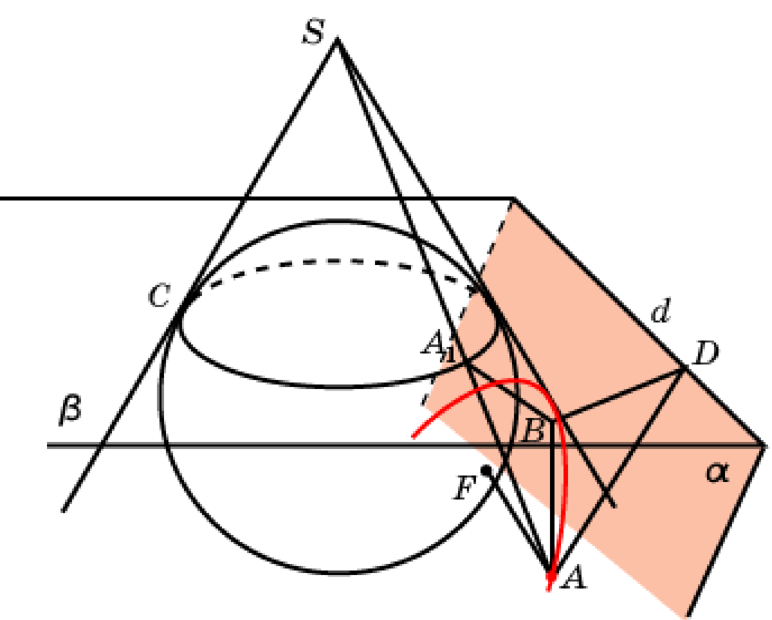
Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается парабола.



Доказательство

Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости α в некоторой точке F и конической поверхности по окружности C, лежащей в плоскости β, перпендикулярной оси. Плоскости α и β образуют между собой угол 90^o-φ и пересекаются по некоторой прямой d.

Пусть A - произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1 точку ее пересечения с окружностью C. Заметим, что прямая AS является касательной к сфере. Прямая AF также является касательной. Отрезки AF и AA_1 равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки. Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость β и перпендикуляр AD на прямую d.

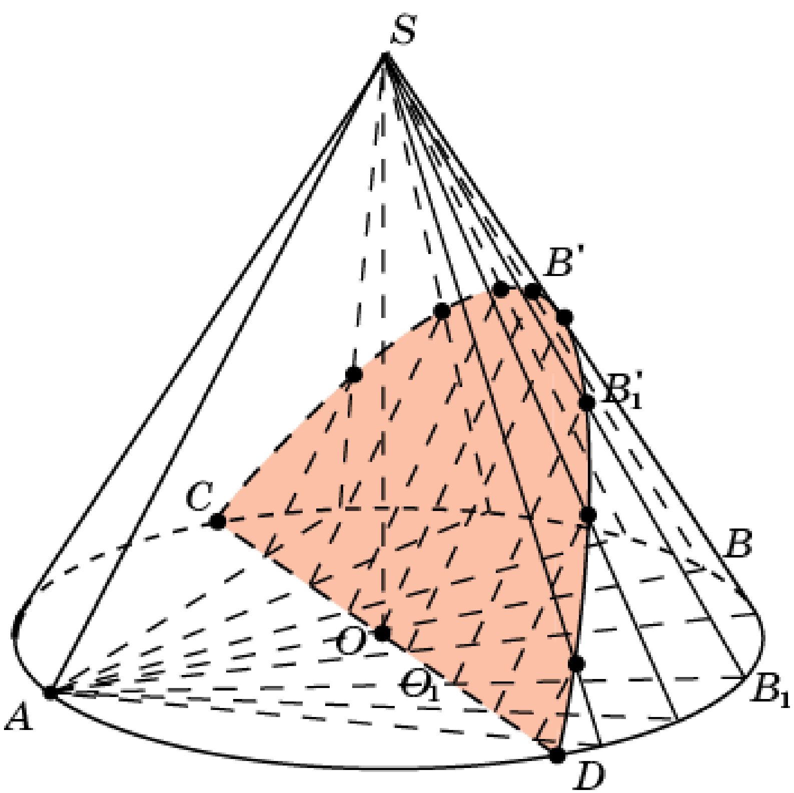


Угол A_1AB равен φ. Угол ADB является углом между плоскостями α и β и поэтому равен 90^o-φ. Следовательно, угол BAD равен φ. Прямоугольные треугольники ABA_1 и ABD равны, так как имеют общий катет и соответственно равные углы. Поэтому $AA_1 = AD$. Окончательно получаем равенство $AF = AD$, которое означает, что расстояние от произвольной точки сечения до точки F равно расстоянию от этой точки до прямой d, т. е. сечением конической поверхности в этом случае является парабола.

Построение сечение конуса (парабола)

В эллипсе, изображающем основание конуса, проведем сопряженные диаметры *AB* и *CD*.

Через точку *O* проведем прямую, параллельную *SA* и ее точку пересечения с *SB* обозначим *B'*. Она будут принадлежать искомому сечению.



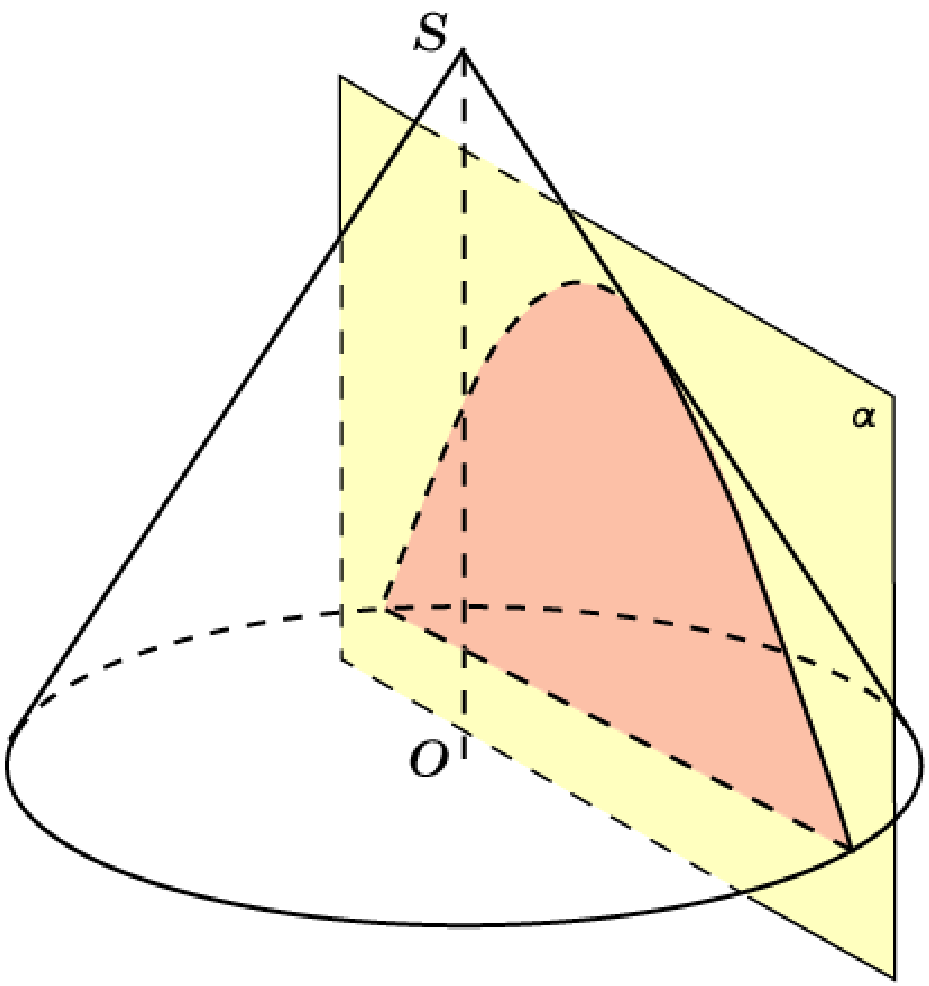
Через какую-нибудь точку O_1 диаметра *CD* проведем прямую AO_1 и ее точку пересечения с эллипсом основания обозначим B_1. Через точку O_1 проведем прямую, параллельную *SA* и ее точку пересечения с SB_1 обозначим B'_1. Она будет принадлежать искомому сечению.

Аналогичным образом построим несколько других точек.

Соединяя их плавной кривой, получим искомое сечение.

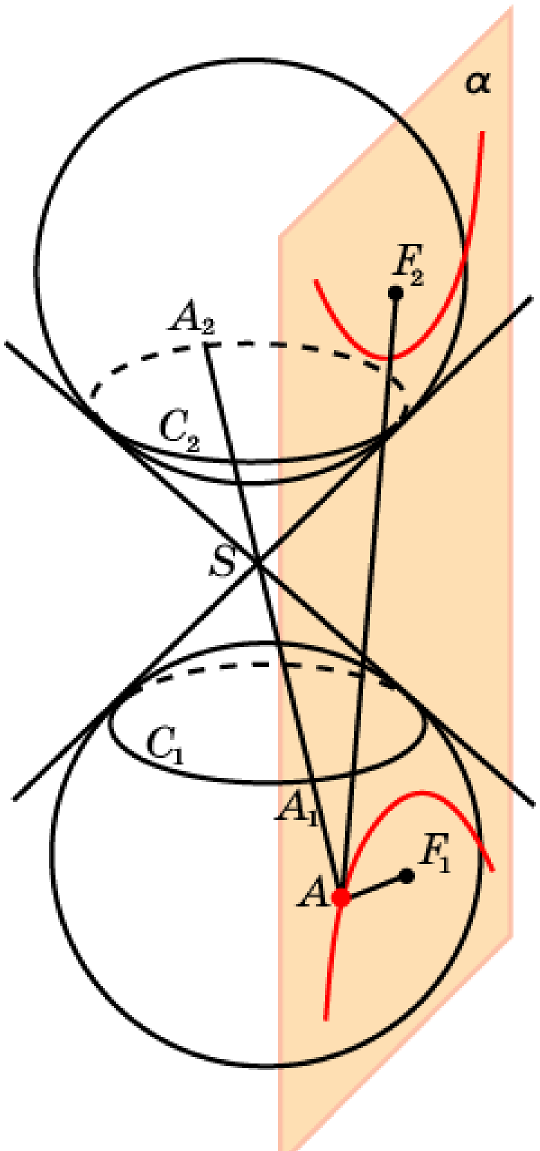
Теорема 3

Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший угла между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается гипербола.



Доказательство

Впишем в коническую поверхность сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1 и F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно.



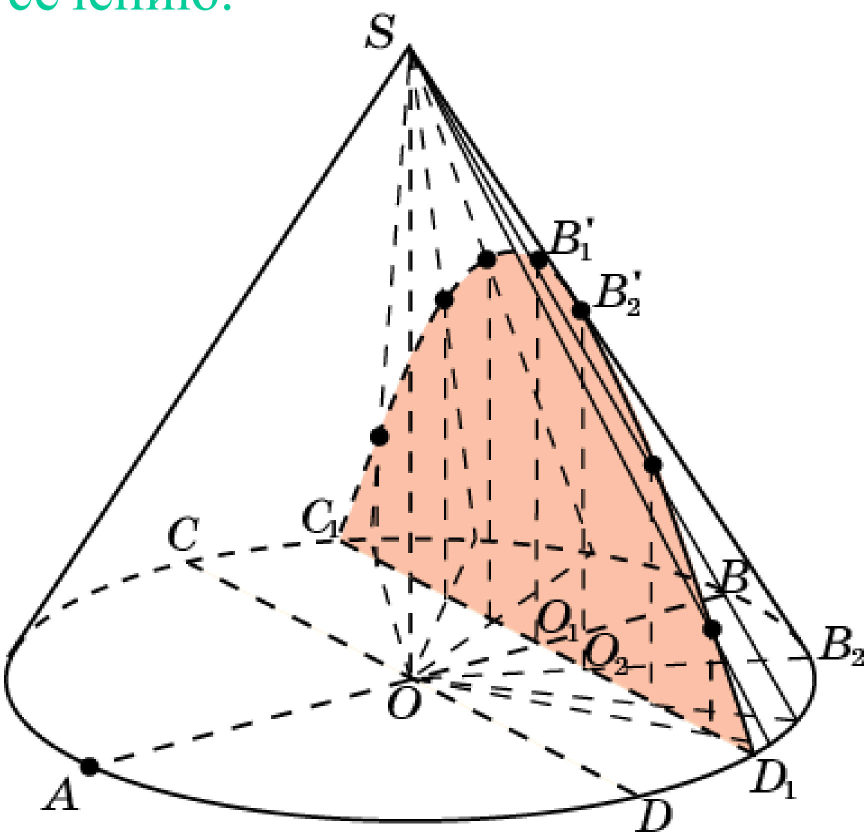
Пусть A - точка сечения, расположенная в той же части конической поверхности, что и точка F_1. Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_2 - AF_1 = AA_2 - AA_1 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна сумме образующих соответствующих конусов. Следовательно, разность $AF_2 - AF_1$ расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. Таким образом, сечением конической поверхности в этом случае является гипербола.

Построение сечение конуса (гипербола)

Построим сечение конуса, параллельное его оси *SO*.

В эллипсе, изображающем основание конуса, проведем сопряженные диаметры *AB* и *CD*.

Проведем хорду C_1D_1, параллельную *CD*. Через точку O_1 ее пересечения с диаметром *AB* проведем прямую, параллельную *SO* и ее точку пересечения с *SB* обозначим B'_1. Она будет принадлежать искомому сечению.



Через какую-нибудь точку O_2 хорды C_1D_1 проведем прямую OO_2 и ее точку пересечения с эллипсом обозначим B_2.

Через точку O_2 проведем прямую, параллельную *SO* и ее точку пересечения с SB_2 обозначим B'_2. Она будет принадлежать искомому сечению.

Аналогичным образом построим несколько других точек.

Соединяя их плавной кривой, получим искомое сечение.

Упражнение 1

Какую форму принимает поверхность воды в наклоненной конусообразной колбе?

Ответ: Эллипса, параболы или гиперболы.

Упражнение 2

Пучок света карманного фонарика имеет форму конуса. Какую форму имеет освещенный фонариком участок ровной поверхности в зависимости от угла наклона фонарика?

Ответ: Эллипса, параболы или гиперболы.

Упражнение 3

Что представляет собой сечение конической поверхности, параллельное: а) оси; б) образующей?

Ответ: а) Гипербола; б) парабола.

Упражнение 4

Через центр основания конуса и середину образующей проведена плоскость. Что представляет собой сечение конуса этой плоскостью?

Ответ: Фигура, ограниченная параболой.

Упражнение 5

Высота конуса равна радиусу основания. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, образующей с осью угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°?

Ответ: Фигура, ограниченная: а) гиперболой; б) параболой; в) эллипсом.

Упражнение 6

Образующая конуса в два раза больше радиуса основания. Под каким углом к оси нужно провести сечение конуса плоскостью, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

Ответ: а) Больше 60°; б) 60°; в) меньше 60°.