ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Объем – величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.

2. Равные фигуры имеют равные объемы.

3. Если фигура $Ф$ составлена из двух неперекрывающихся фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, то объем фигуры $Ф$ равен сумме объемов фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т.е.

$$V(Ф)=V(Ф_1)+V(Ф_2).$$

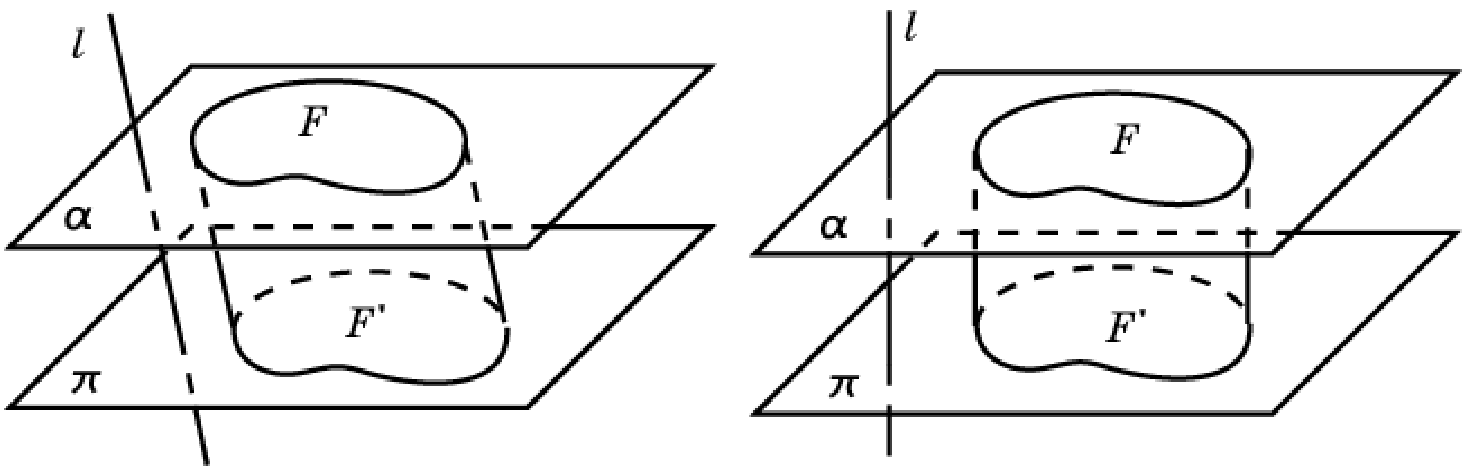
Две фигуры, имеющие равные объемы, называются равновеликими.

Обобщенный цилиндр

Пусть α и π - две параллельные плоскости, *l* - пересекающая эти плоскости прямая; *F* – фигура на одной из этих плоскостей, *F’* – ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой *l*. Отрезки, соединяющие точки фигуры *F* с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть обобщенным цилиндром. Фигуры *F* и *F’* называются основаниями обобщенного цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют высотой обобщенного цилиндра.

В случае, если в определении обобщенного цилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая *l* перпендикулярна плоскостям α и π, то обобщенный цилиндр называется прямым. В противном случае цилиндр называется наклонным.

Частным случаем обобщенного цилиндра являются цилиндр и призма.



Объем обобщенного цилиндра

Теорема. Объем прямого обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Следствие 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где a, b, c – ребра параллелепипеда.

Следствие 2. Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания, h – высота призмы.

Следствие 3. Объем прямого кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

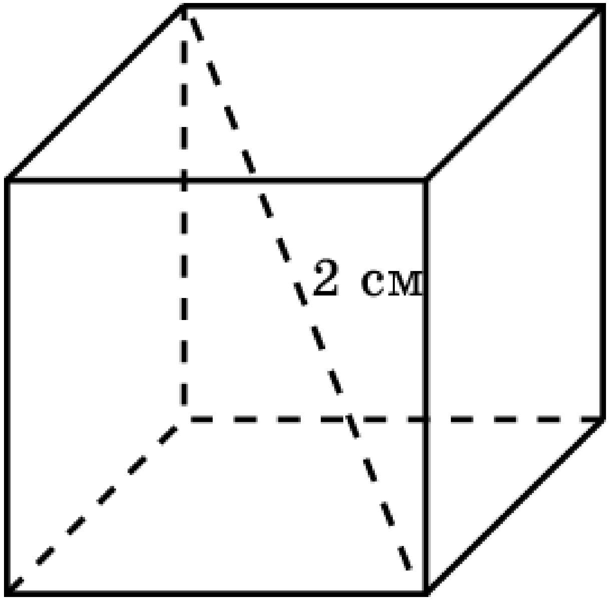
Упражнение 1

Может ли объем фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулем?

Ответ: а) Нет; б) да.

Упражнение 2

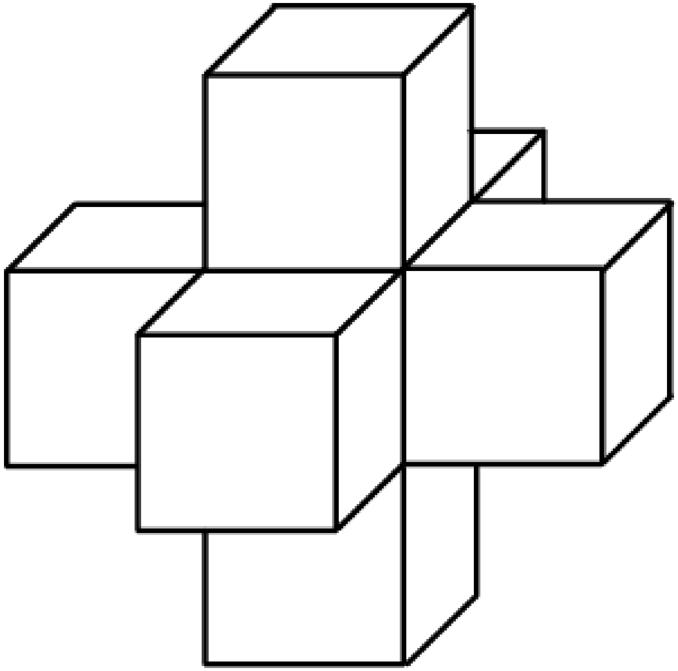
Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объем.



Ответ: $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ см^3.

Упражнение 3

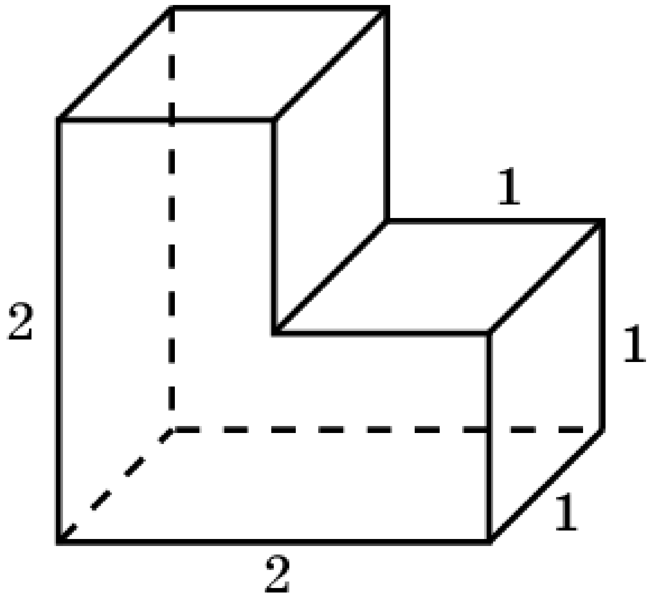
Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



Ответ: Семь куб. ед.

Упражнение 4

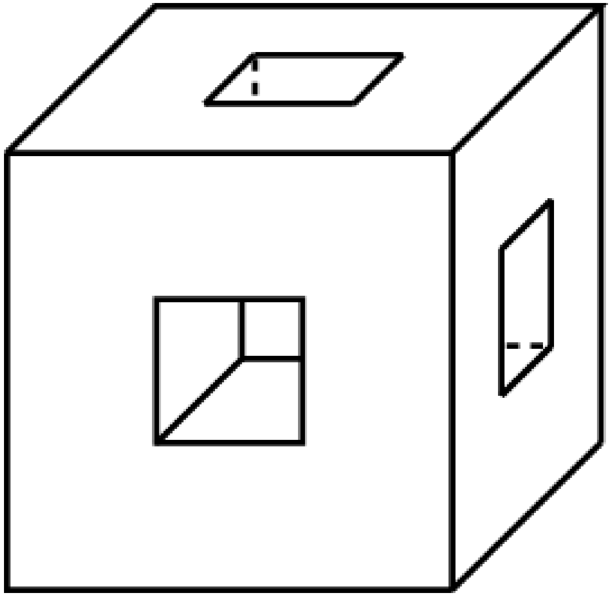
Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



Ответ: Три куб. ед.

Упражнение 5

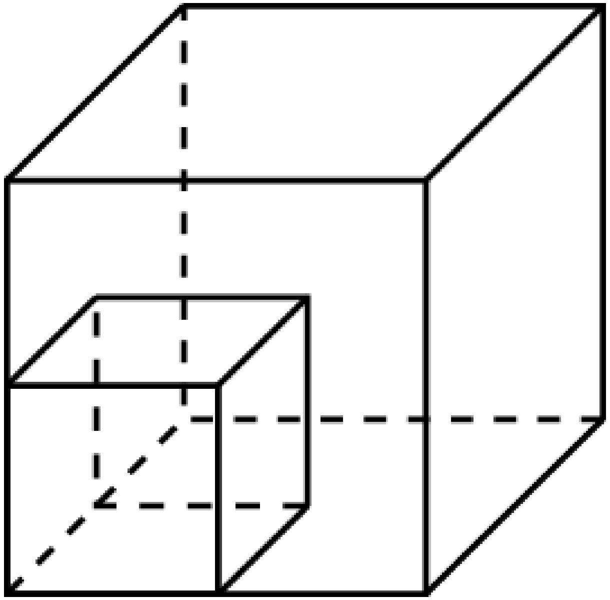
Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см. Найдите объем оставшейся части.



Ответ: 20 см^3.

Упражнение 6

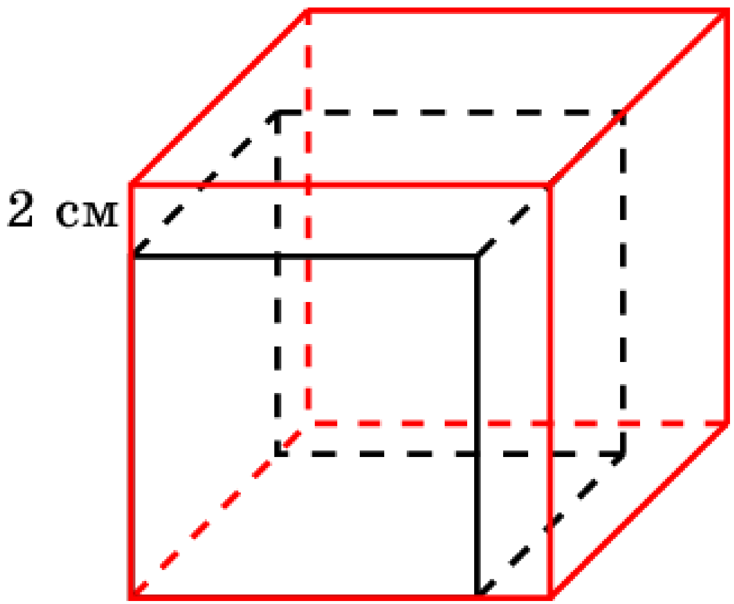
Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : n?



Ответ: а) 1 : 8; б) 1 : 27; в) 1 : n^3.

Упражнение 7

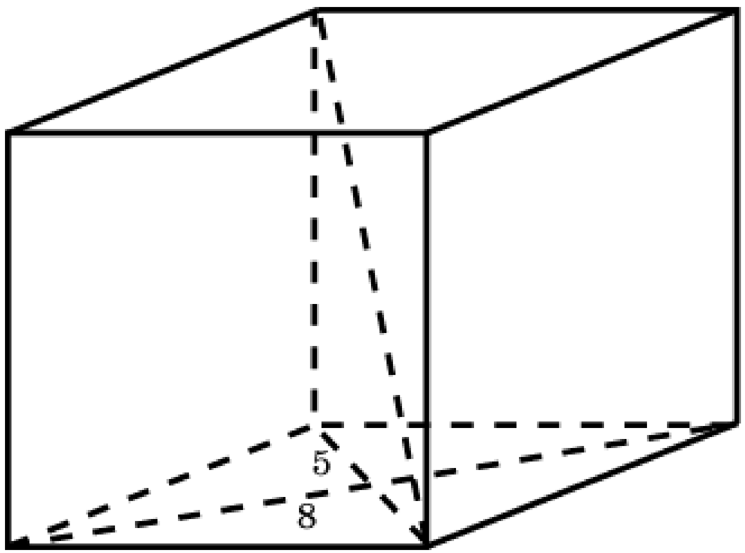
Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.



Ответ: 3 см.

Упражнение 8

Основание прямой призмы – параллелограмм, стороны которого равны 8 см и 5 см образуют угол в 60°. Меньшая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определите объем этой призмы.



Ответ: 140 см^3.

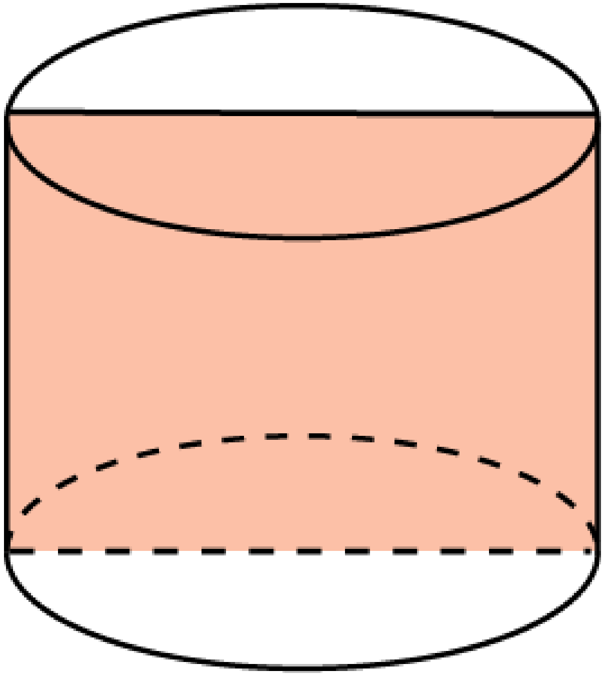
Упражнение 9

Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

Ответ: а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз;
б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в n^2 раз;
в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз.

Упражнение 10

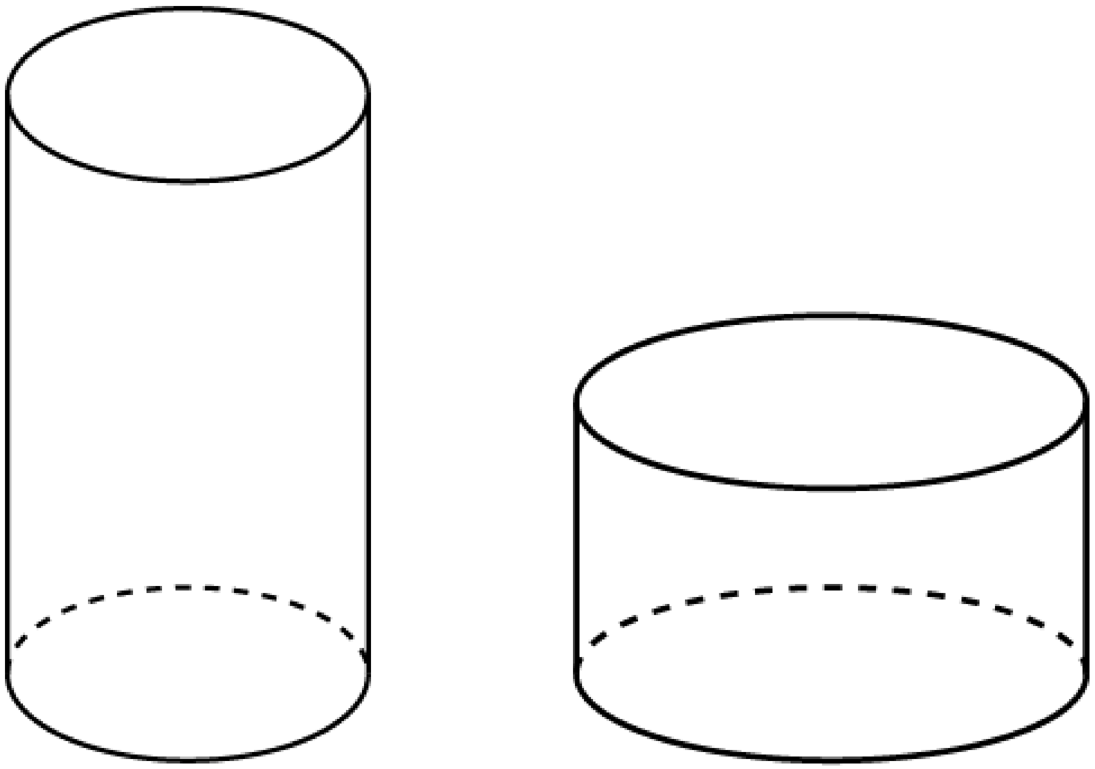
Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной 1 см. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\frac{\pi}{4}$ см^3.

Упражнение 11

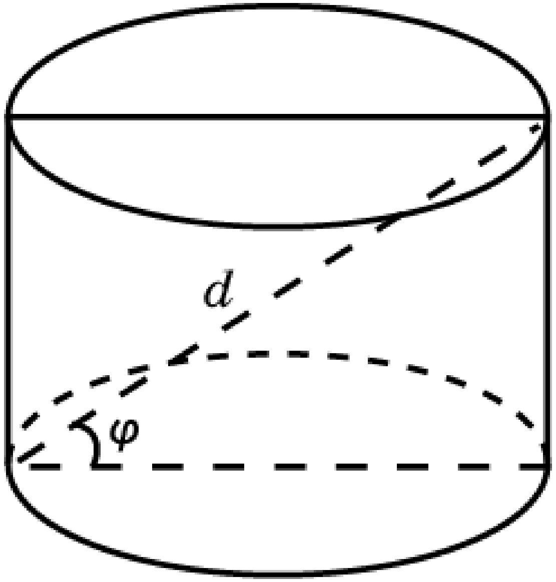
Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?



Ответ: Та, которая шире.

Упражнение 12

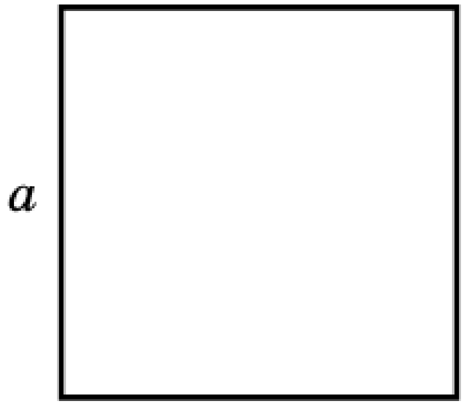
Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $V = \frac{\pi \cdot d^3}{4} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi.$

Упражнение 13

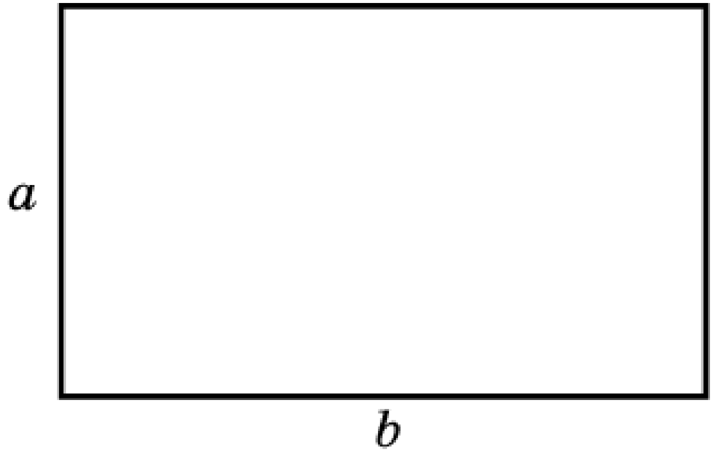
Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.



Ответ: $\pi \cdot a^3$.

Упражнение 14

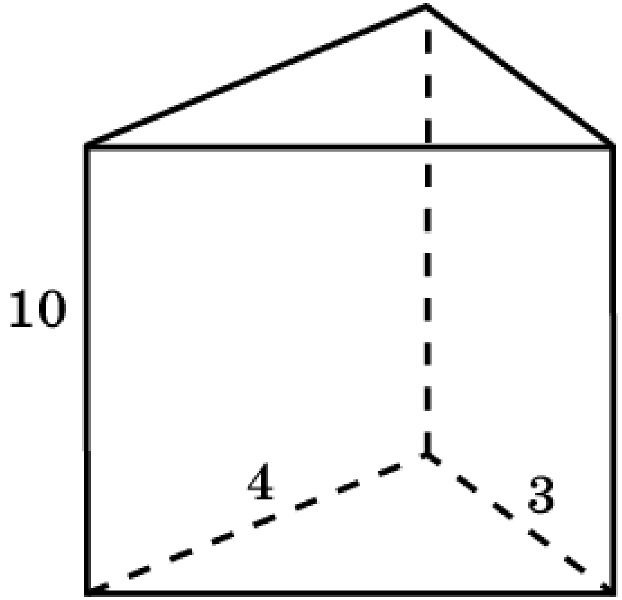
Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон a и b. Как относятся объемы цилиндров?



Ответ: $a : b$.

Упражнение 15

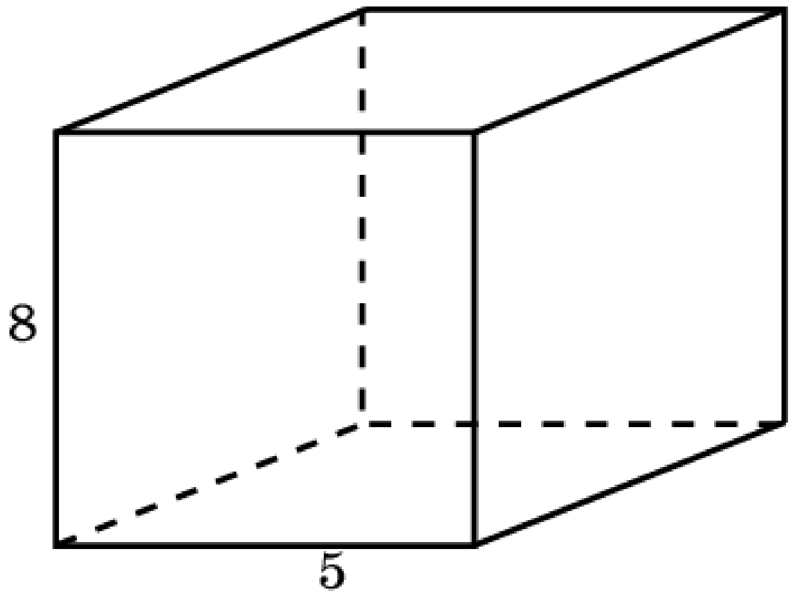
Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.



Ответ: 60 см^3.

Упражнение 16

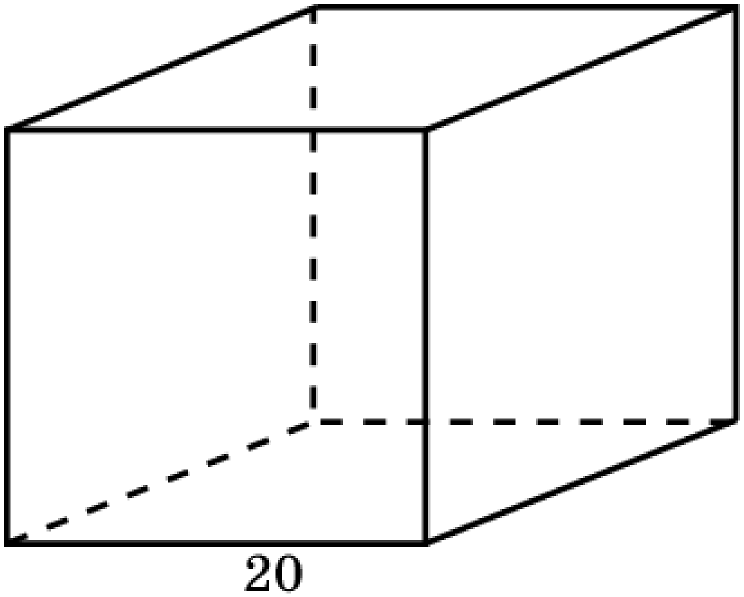
Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой 5 см и высота 8 см.



Ответ: 200 см^3.

Упражнение 17

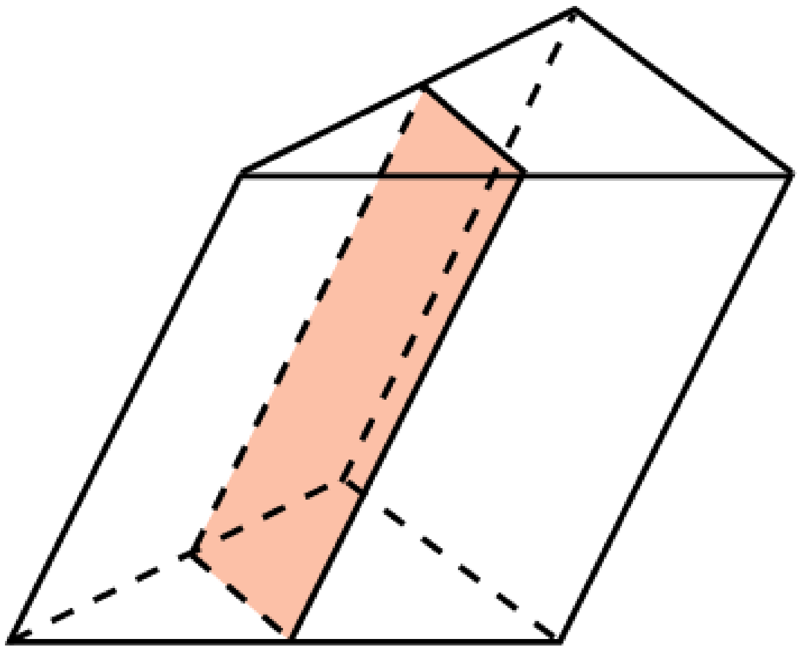
Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем 4800 см^3.



Ответ: 12 см.

Упражнение 18

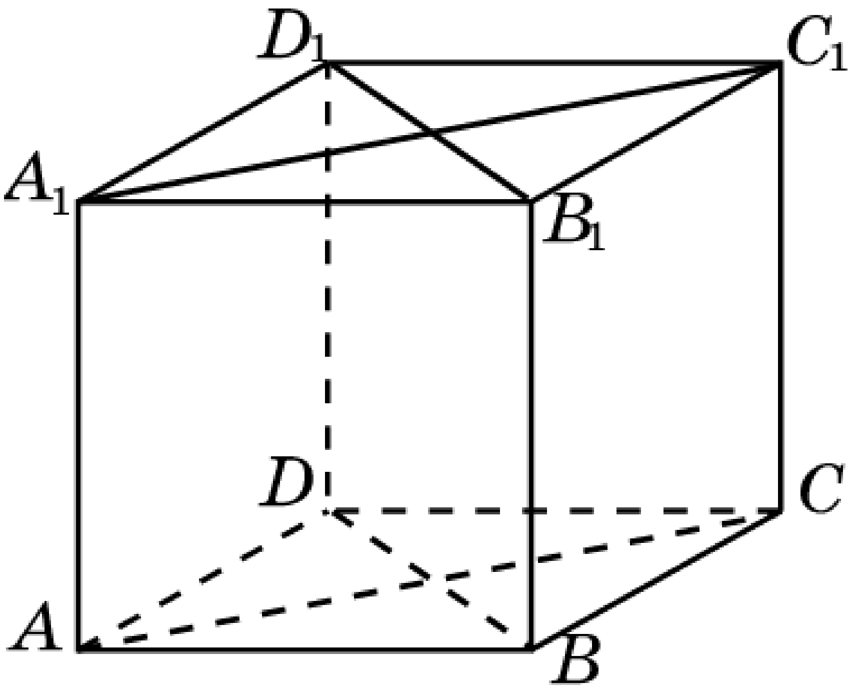
Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: 1 : 3.

Упражнение 19

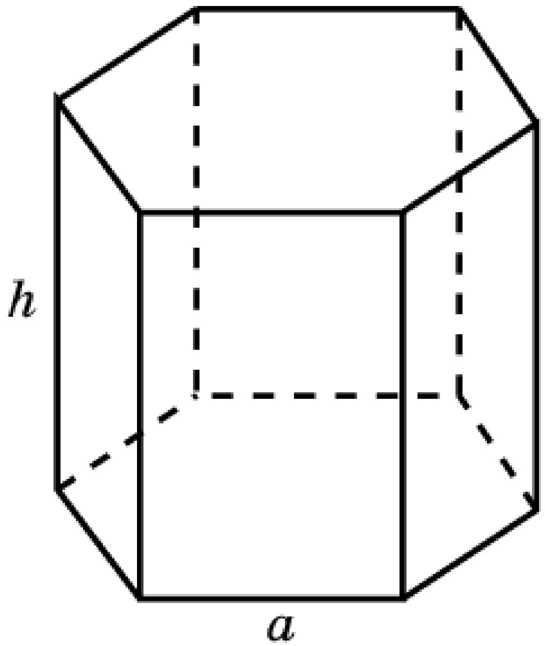
Основание прямой призмы - ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем призмы.



Ответ: 3 м^3.

Упражнение 20

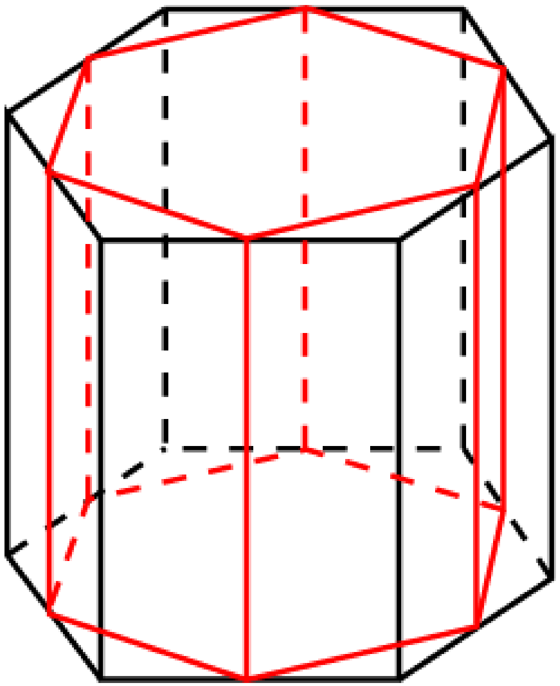
Найдите формулу объема правильной n-угольной призмы, высота которой равна h, а сторона основания равна a.



Ответ: $V = \dfrac{n \cdot a^2 h}{4tg\dfrac{180^0}{n}}$.

Упражнение 21

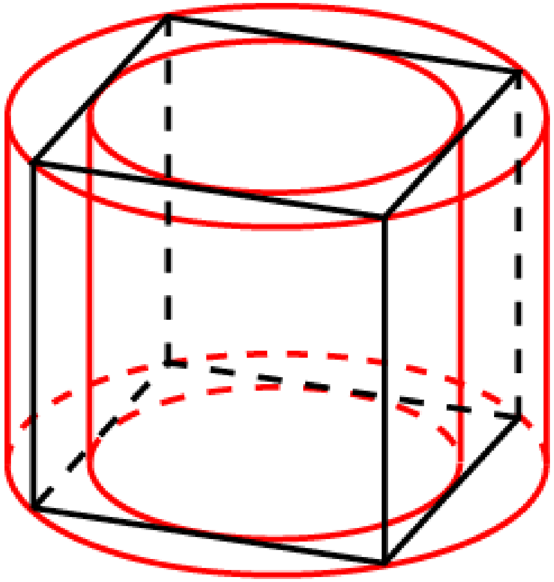
Объем правильной шестиугольной призмы равен V. Определите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.



Ответ: $\dfrac{3V}{4}$.

Упражнение 22

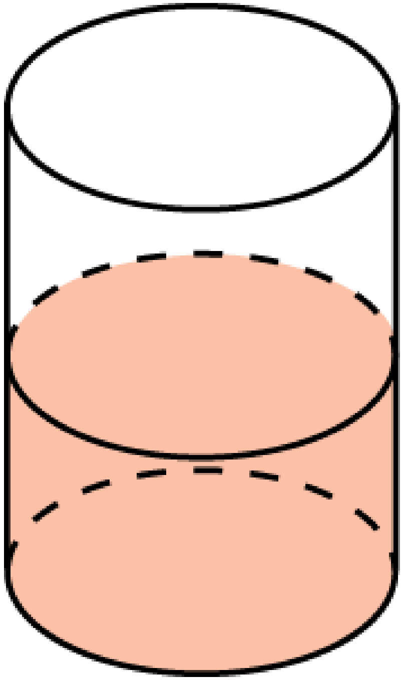
Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?



Ответ: В 2 раза.

Упражнение 23

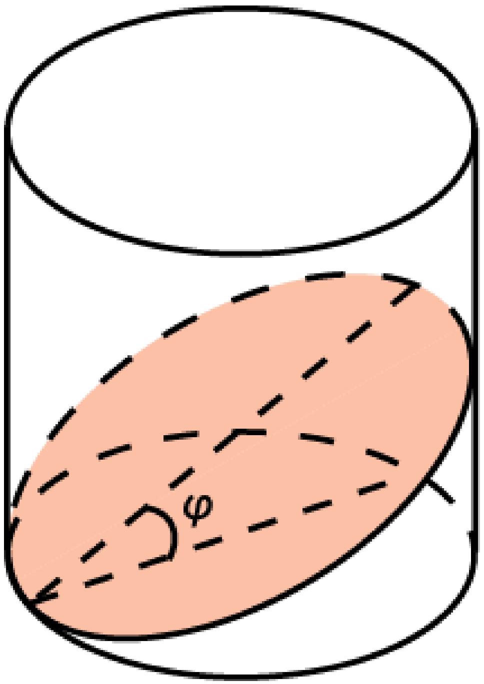
В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?



Ответ: 243π см^3.

Упражнение 24

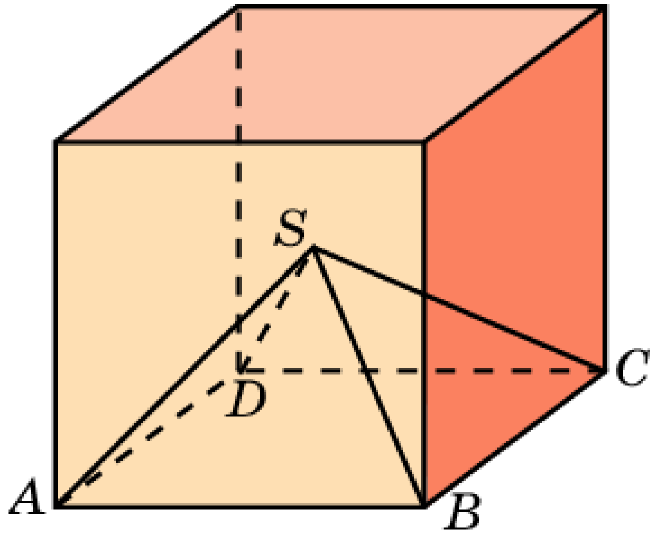
Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.



Ответ: $\pi R^3 \operatorname{tg}\varphi$.

Упражнение 25

Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 1, а высота равна 0,5.

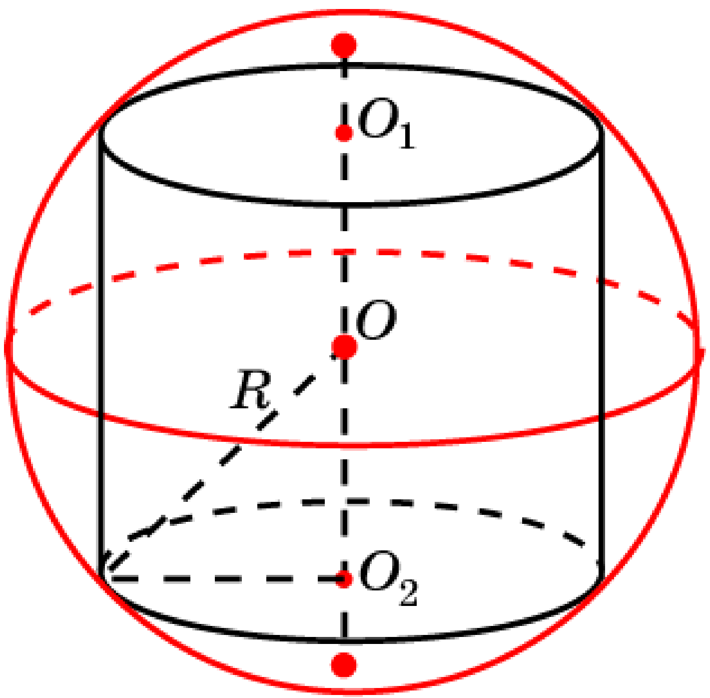


Решение: Объем призмы равен одной шестой объема единичного куба.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 26

Какой наибольший объем может иметь цилиндр, вписанный в единичную сферу?

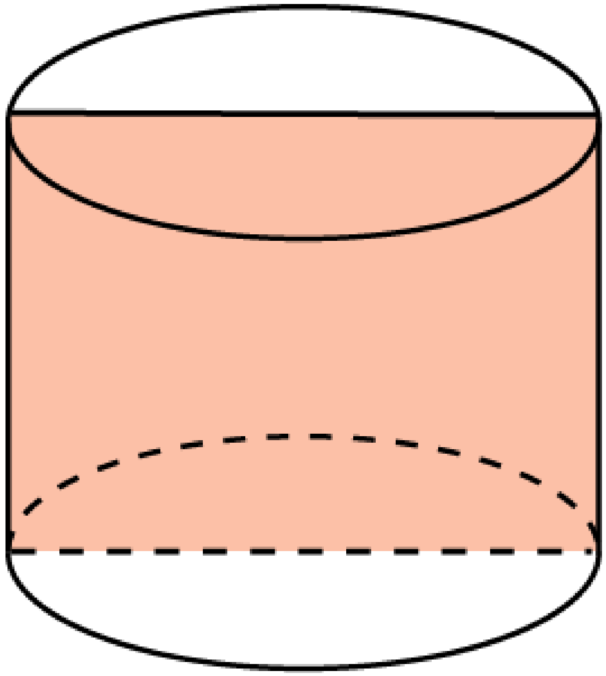


Решение: Обозначим x половину высоты цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра будет равен $\sqrt{1-x^2}$. Объем цилиндра равен $\pi(1-x^2)2x$. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)=\pi(1-x^2)2x.$ на отрезке [0, 1] воспользуемся производной. Производная $f'(x)=\pi(2-6x^2)$ обращается в ноль в точке $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, в которой функция принимает наибольшее значение, равное $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

Упражнение 27

Какой наибольший объем может иметь цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 1?



Решение: Обозначим x диаметр основания цилиндра. Тогда его высота равна $\frac{1}{x}$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi x}{4}$. Функция $f(x) = \frac{\pi x}{4}$ неограниченно возрастает и, следовательно, цилиндра наибольшего объема не существует.

Ответ: Наибольшего объема нет.