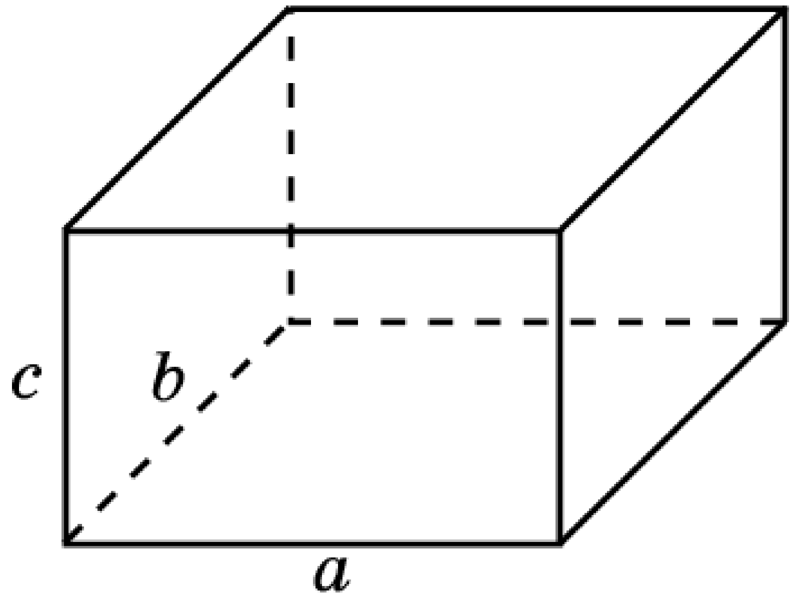
ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т.е. имеет место формула

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

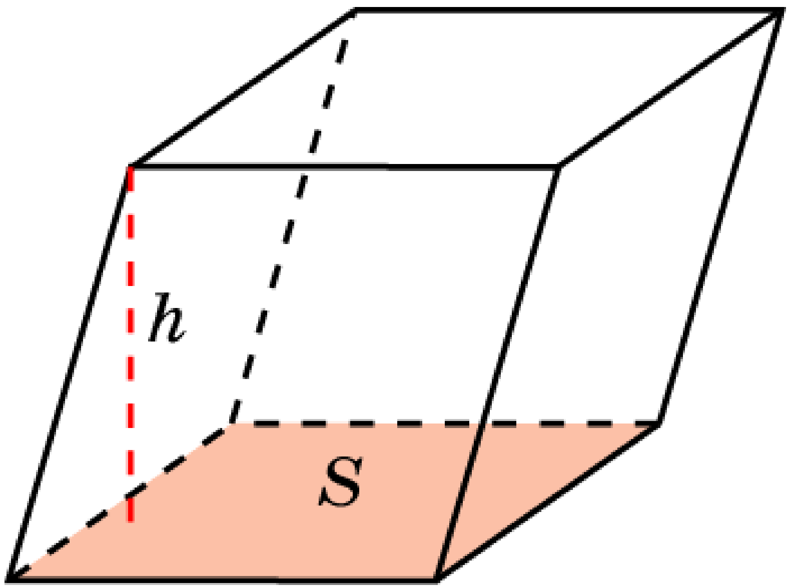
где a, b, c – ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины.



ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА 1

Объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади S грани параллелепипеда на высоту h, проведенную к этой грани, т.е. имеет место формула

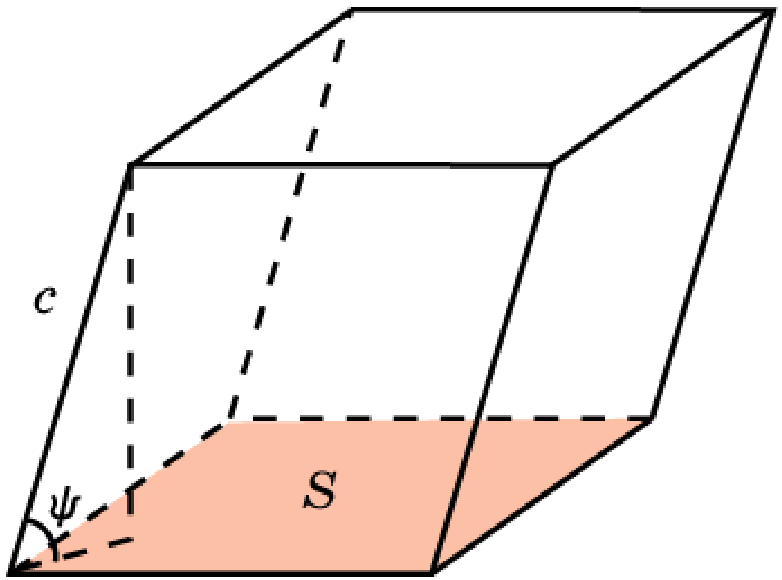
$$V = S \cdot h.$$



ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА 2

Если ребро параллелепипеда равно c и образует с гранью площади S угол ψ , то объем параллелепипеда вычисляется по формуле

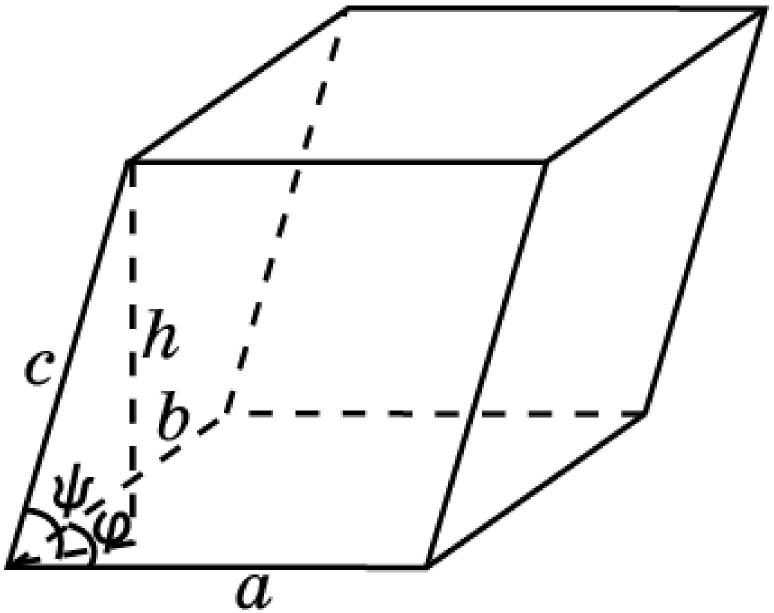
$$V = S \cdot c \cdot \sin \psi.$$



ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА 3

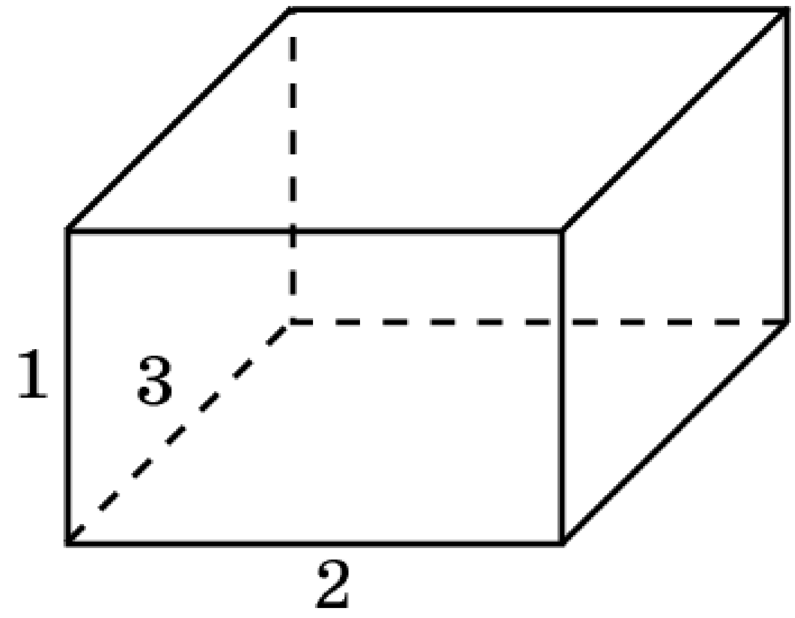
Пусть ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b образуют угол φ , а ребро c наклонено к плоскости ребер a и b под углом ψ. Тогда объем V параллелепипеда выражается формулой

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi.$$



Упражнение 1

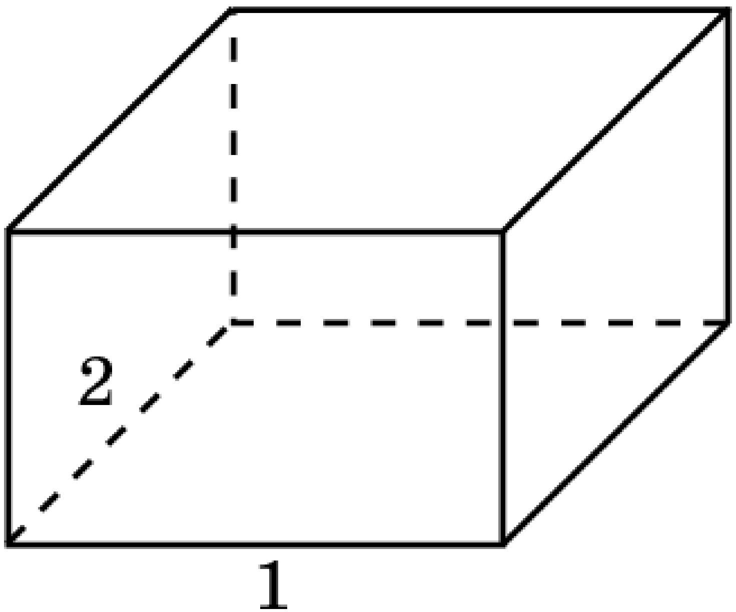
Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

Упражнение 2

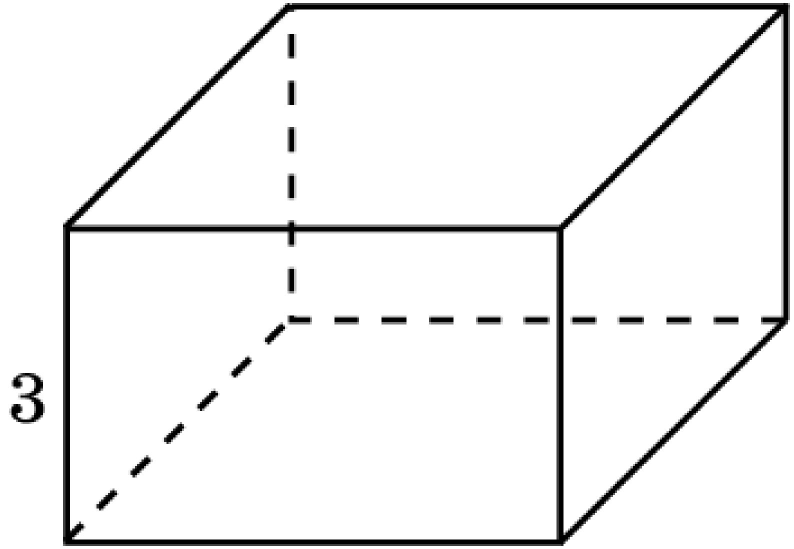
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

Упражнение 3

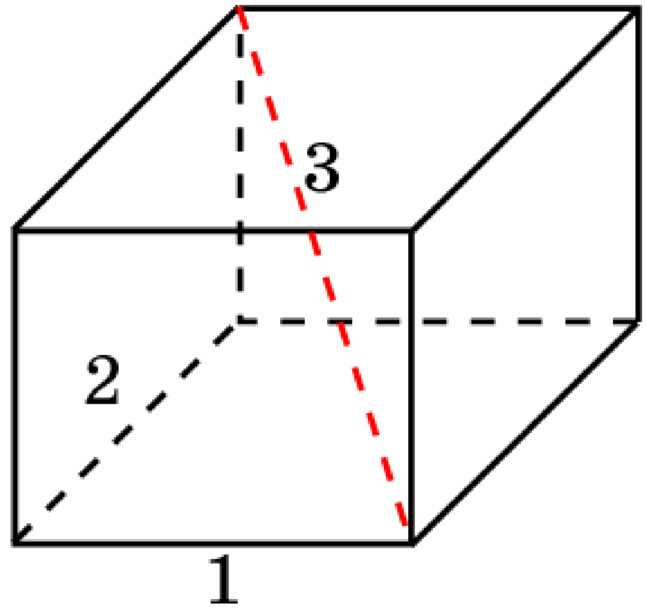
Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 2. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

Упражнение 4

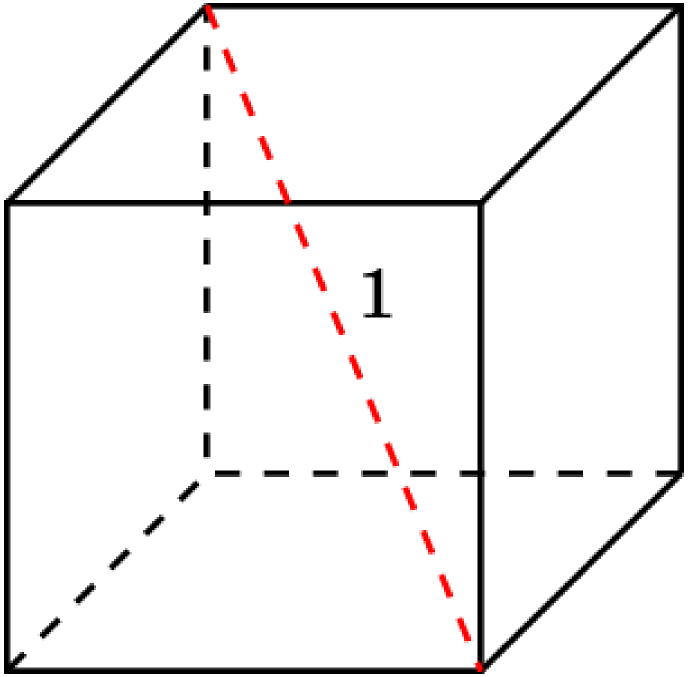
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 4.

Упражнение 5

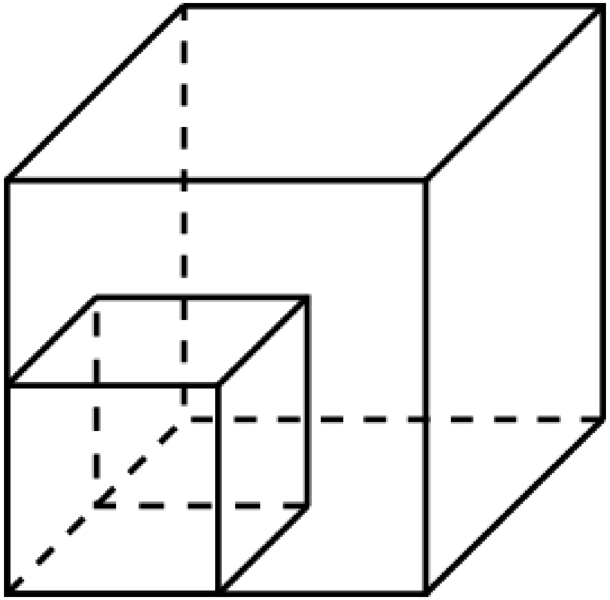
Диагональ куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Упражнение 6

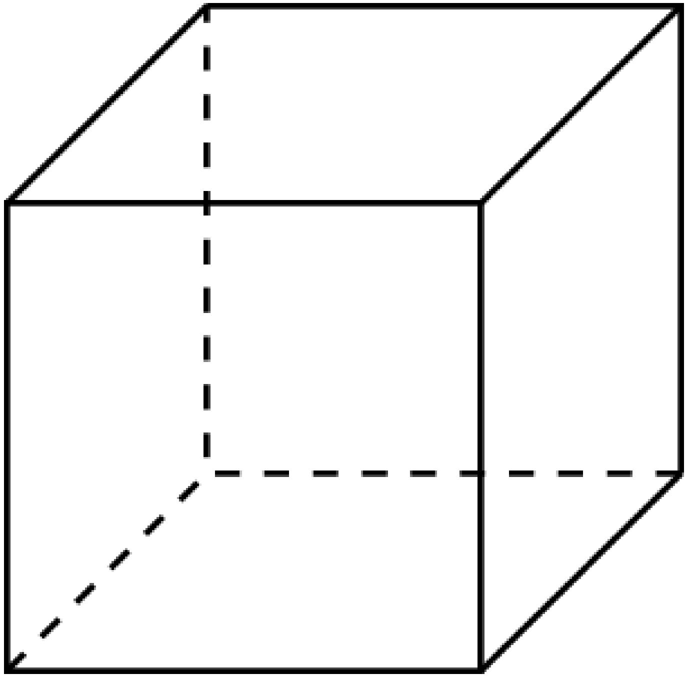
Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить в два раза?



Ответ: В 8 раз.

Упражнение 7

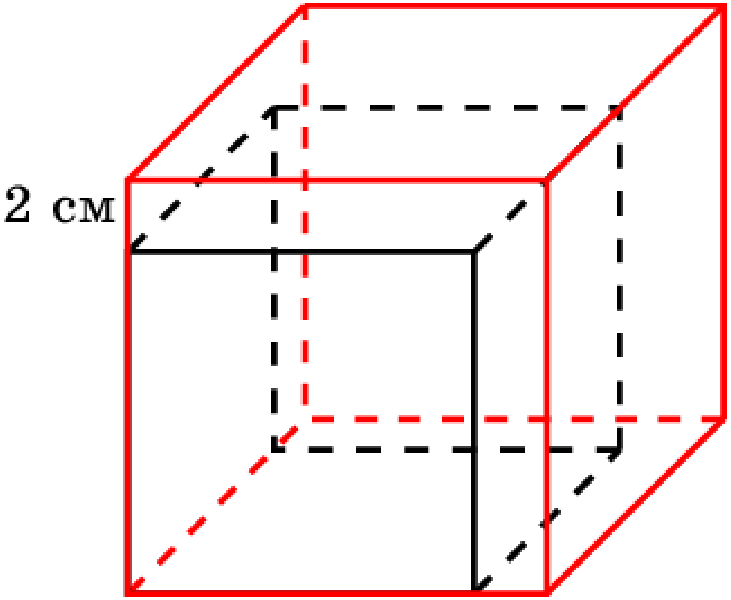
Площадь поверхности куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{36}$.

Упражнение 8

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^2. Найдите ребро куба.



Решение. Пусть ребро куба равно x. Тогда

$$(x+2)^3 - x^3 = 98.$$

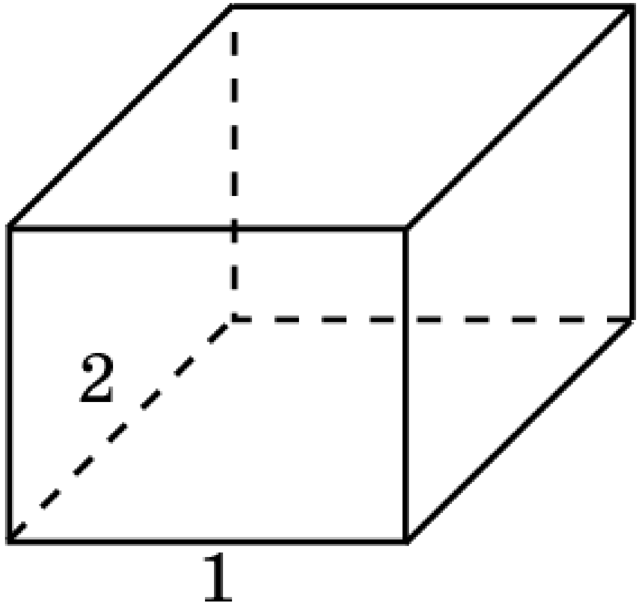
Решая это уравнение, получим

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

Упражнение 9

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 10. Найдите объем параллелепипеда.



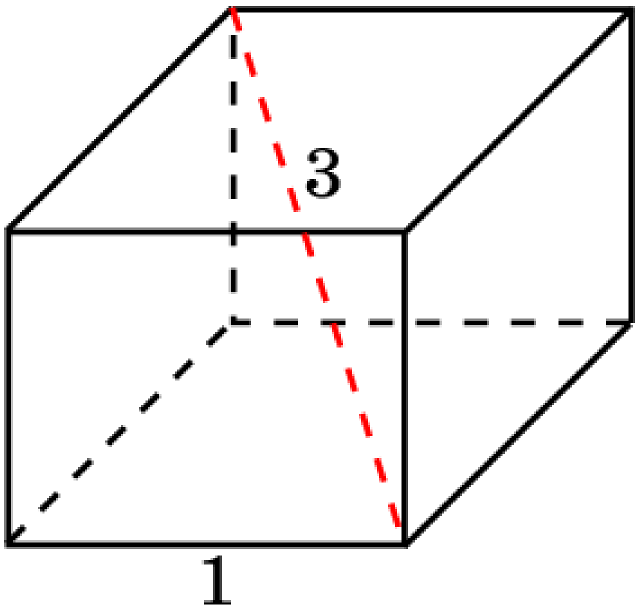
Решение. Пусть третье ребро параллелепипеда равно x. Тогда площадь поверхности будет равна $4 + 6x$. Следовательно, $x = 1$.

Объем параллелепипеда будет равен 2.

Ответ: 2.

Упражнение 10

Ребро прямоугольного параллелепипеда равно 1. Диагональ равна 3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть второе ребро параллелепипеда равно x. Тогда третье ребро будет равно $\sqrt{8-x^2}$. Площадь поверхности будет равна

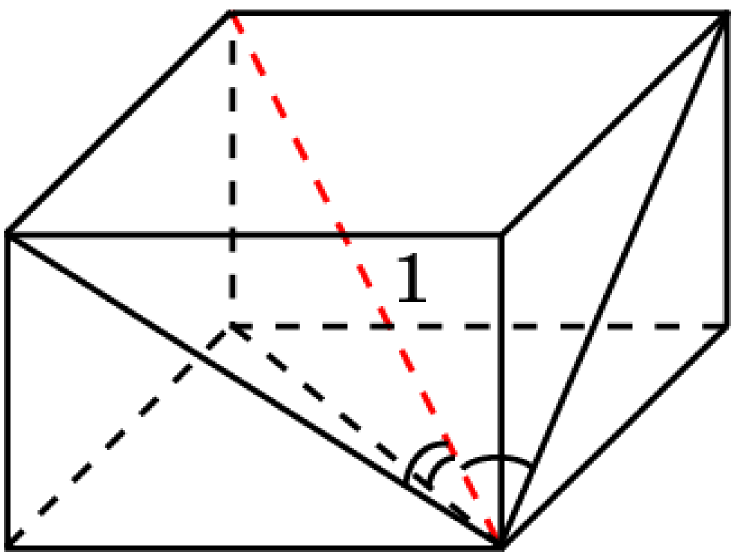
$$2x+2\sqrt{8-x^2}+2x\sqrt{8-x^2}.$$

Приравнивая это выражение к 16, получим $x = 2$. Третье ребро будет равно 2 и, следовательно, искомый объем равен 4.

Ответ: 4.

Упражнение 11

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и образует углы 30°, 45° и 60° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



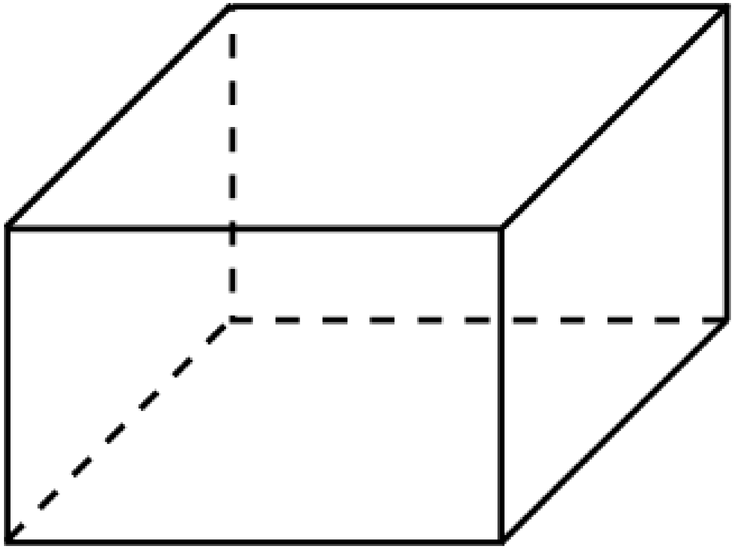
Решение. Ребра параллелепипеда равны $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Следовательно, объем равен $\frac{\sqrt{6}}{8}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{8}.$

Упражнение 12

Площади трех граней параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть ребра параллелепипеда равны x, y, z. Тогда $xy = 1$, $xz = 2$, $yz = 3$. Решая эти уравнения, находим

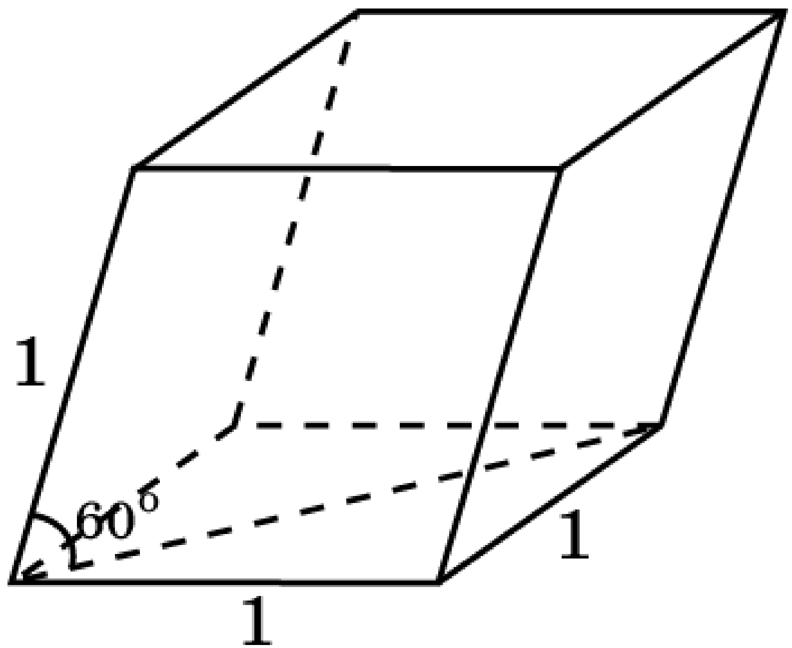
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3},\ y = \frac{\sqrt{6}}{2},\ z = \sqrt{6}.$$

Объем параллелепипеда равен $\sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Упражнение 13

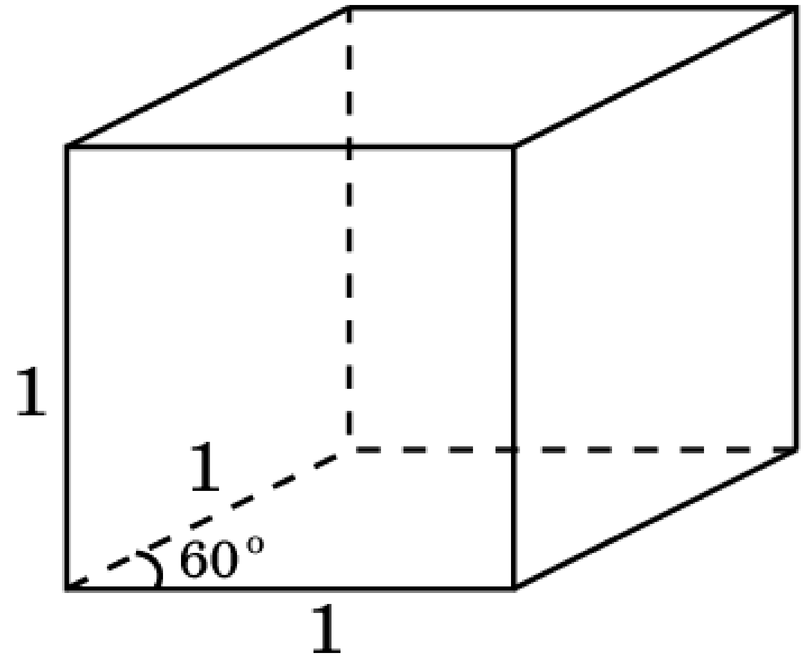
Две противоположные грани параллелепипеда – квадраты со стороной 1. Соединяющее их ребро равно 1 и наклонено к плоскостям этих граней под углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 14

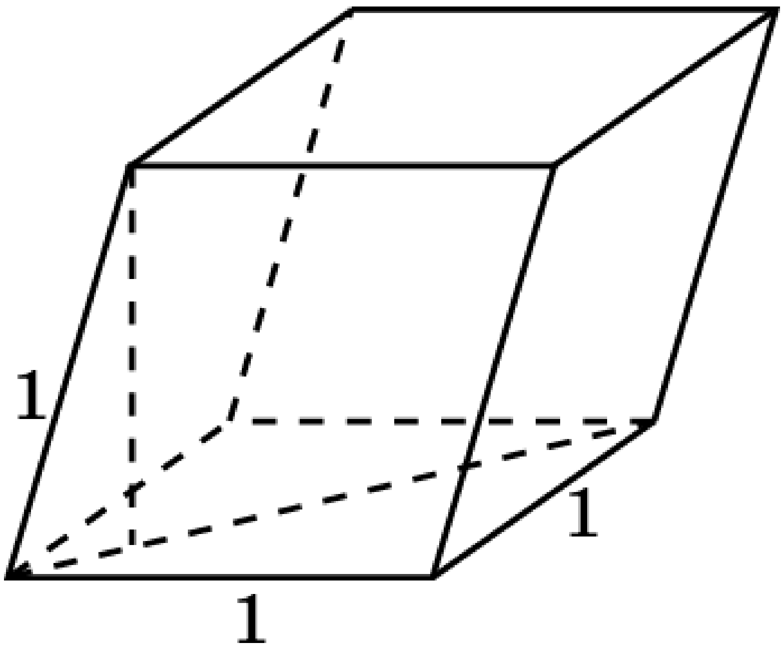
Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда перпендикулярно этой грани и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 15

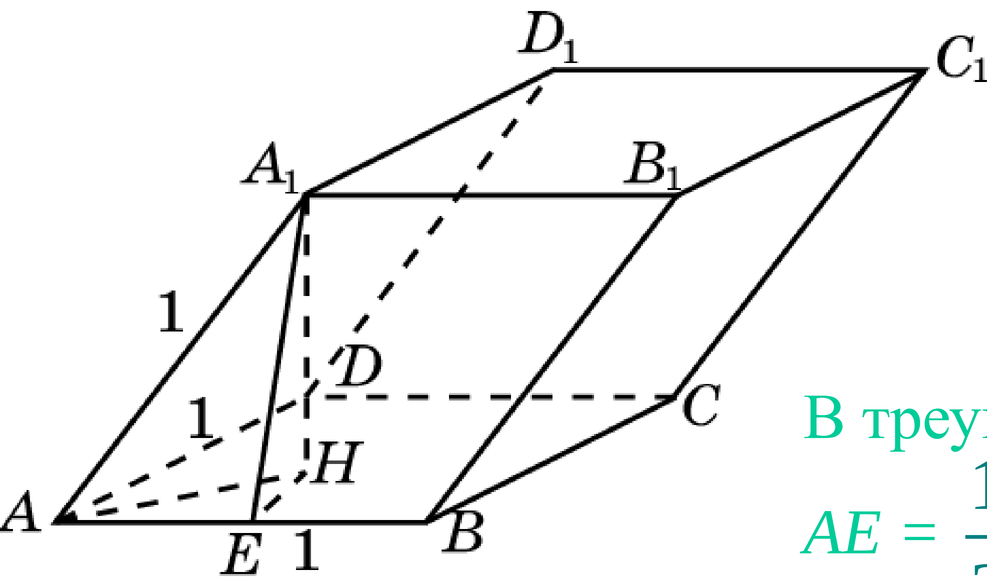
Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнение 16

Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 и острыми углами при этой вершине 60°. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Площадь грани $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота A_1E грани ABB_1A_1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

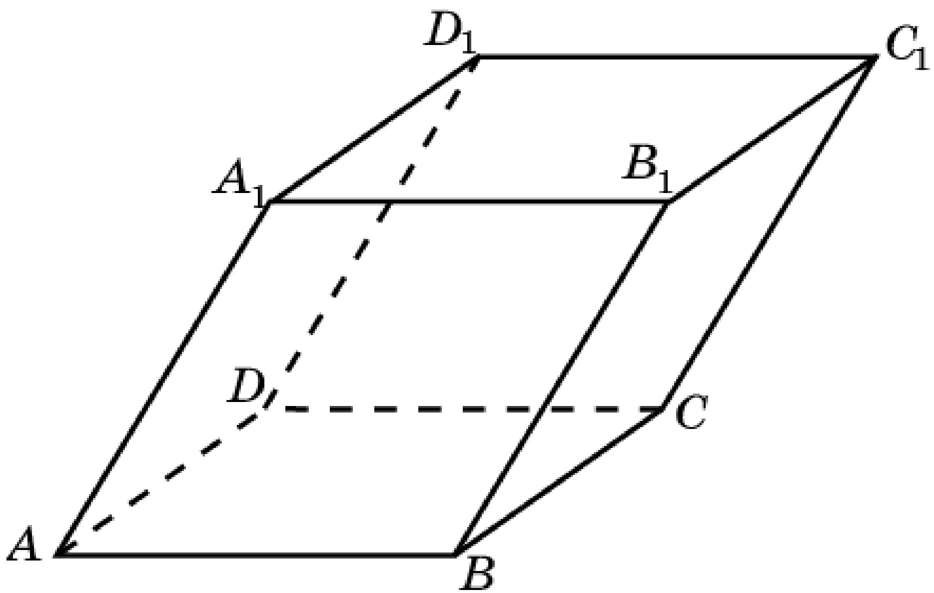
В треугольнике AEH угол A равен 30°, $AE = \frac{1}{2}$. Значит, $EH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и, следовательно, высота A_1H равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Таким образом, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 17

В параллелепипеде две грани имеют площади S_1 и S_2, их общее ребро равно a, и они образуют между собой двугранный угол 150°. Найдите объем параллелепипеда.



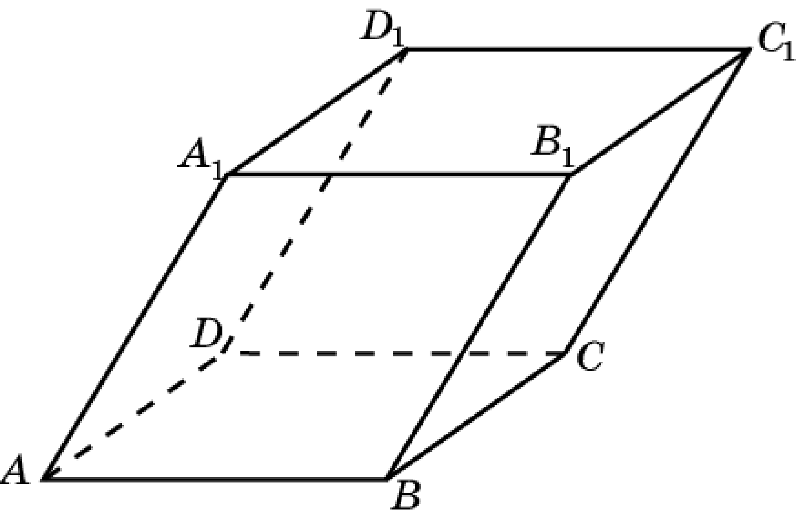
Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и BCC_1B_1 равны S_1 и S_2, ребро BC равно a. Тогда высота параллелограмма BCC_1B_1 равна S_2/a. Высота параллелепипеда, проведенная к грани $ABCD$, равна $\frac{S_2}{2a}$.

Следовательно, объем параллелепипеда равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Ответ: $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Упражнение 18

В параллелепипеде две грани являются прямоугольниками с площадями 20 см^2 и 24 см^2. Угол между их плоскостями равен 30^о. Еще одна грань этого параллелепипеда имеет площадь 15 см^2. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и ADD_1A_1 равны 20 см^2 и 24 см^2. Тогда площадь грани ABB_1A_1 равна 15 см^2, а угол A_1AB равен 30^о. Пусть $AD = x$. Тогда $AB = 20/x$, $AA_1 = 24/x$. Имеем равенство

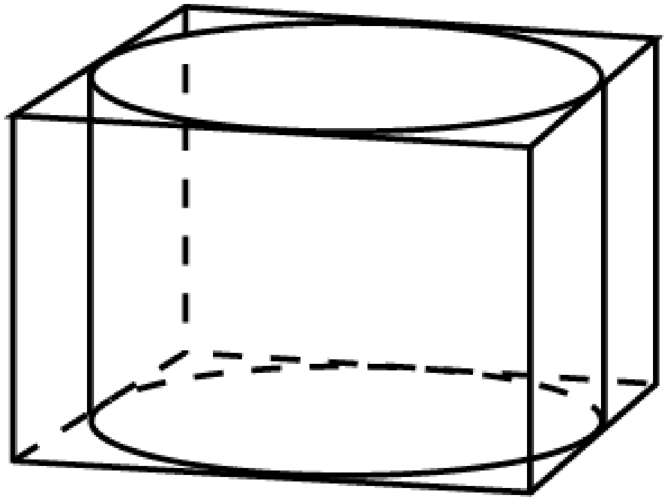
$$\frac{20}{x} \cdot \frac{24}{x} \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

Откуда находим $x = 4$ см. Высота, проведенная к грани $ABCD$ равна половине ребра AA_1 и равна 3 см. Следовательно, объем параллелепипеда равен 60 см^3.

Ответ: 60 см^3.

Упражнение 19

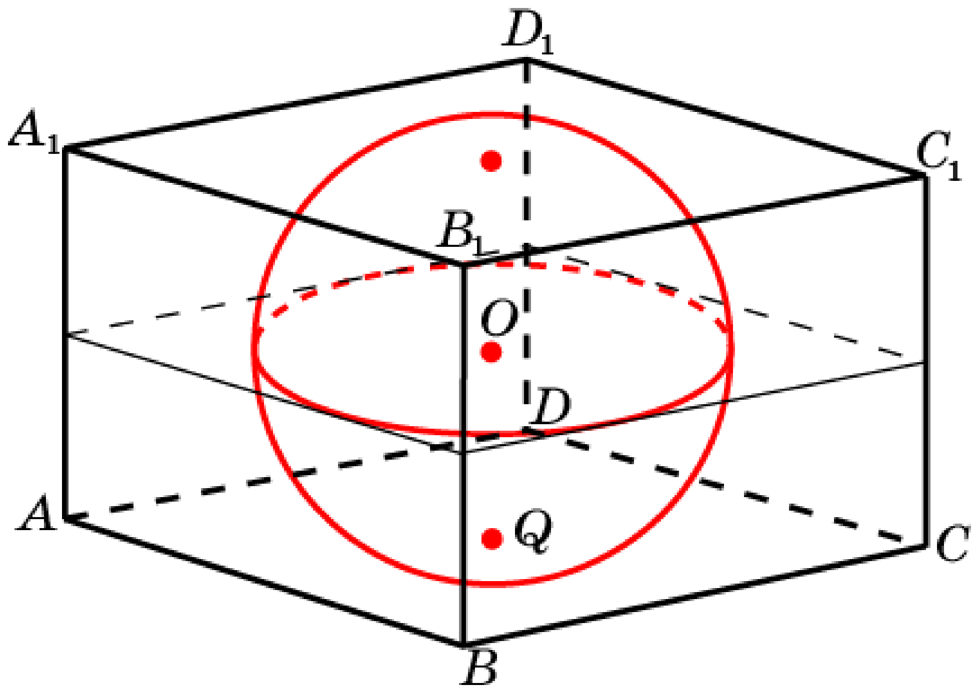
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.

Упражнение 20

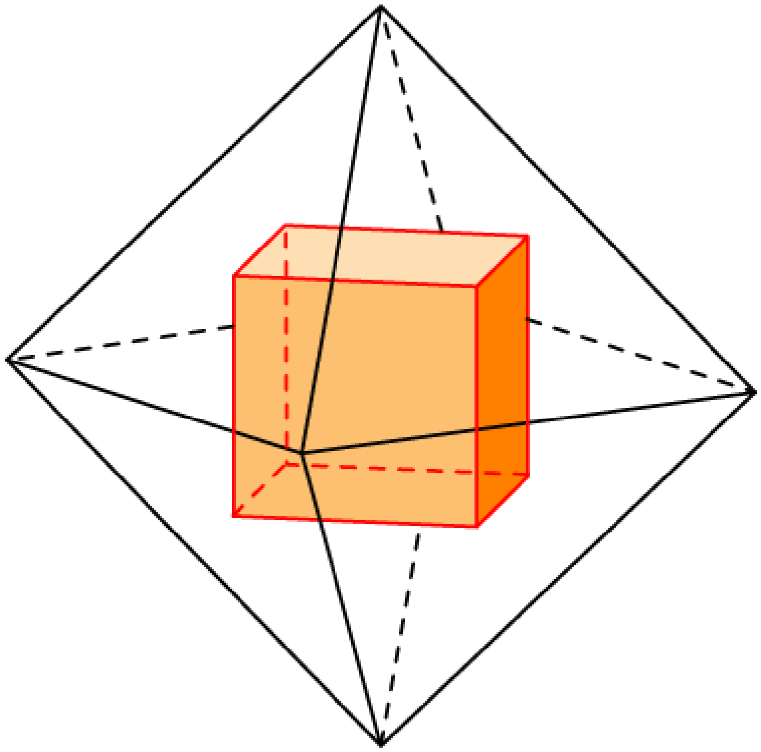
Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.

Упражнение 21

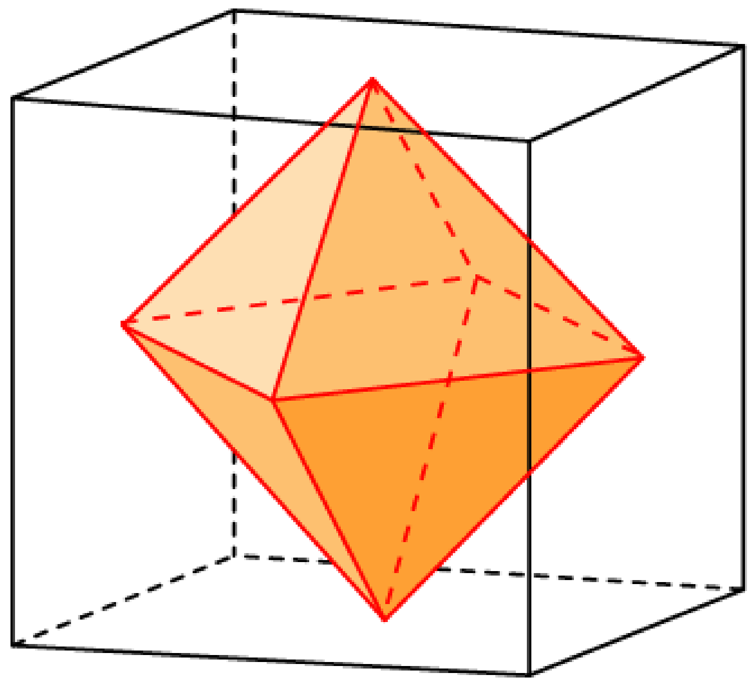
Найдите объем куба, вписанного в единичный октаэдр.



Решение: Ребро куба равно $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Объем куба равен $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

Упражнение 22

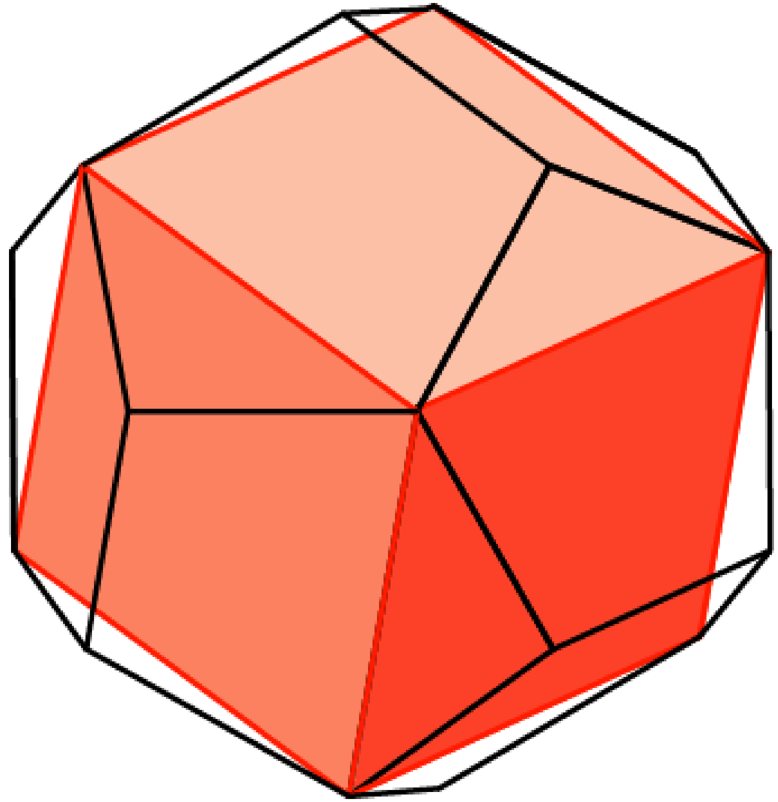
Найдите объем куба, описанного около единичного октаэдра.



Решение: Ребро куба равно $\sqrt{2}$. Объем куба равен $2\sqrt{2}$.

Упражнение 23

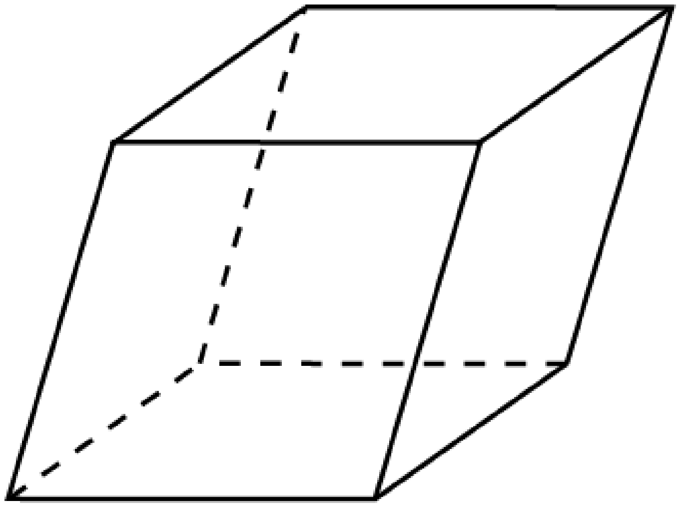
Найдите объем куба, вписанного в единичный додекаэдр.



Решение: Ребро куба равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Объем куба равен $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 24

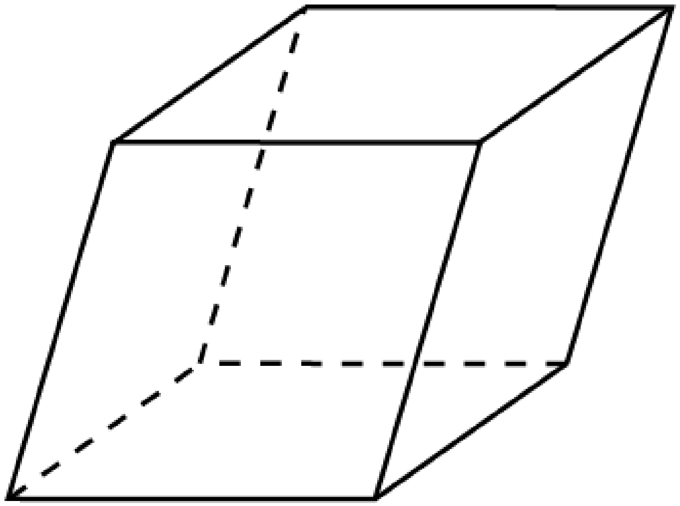
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть меньше 1, а объем параллелепипеда быть больше 100?



Ответ: Нет, объем будет меньше 1.

Упражнение 25

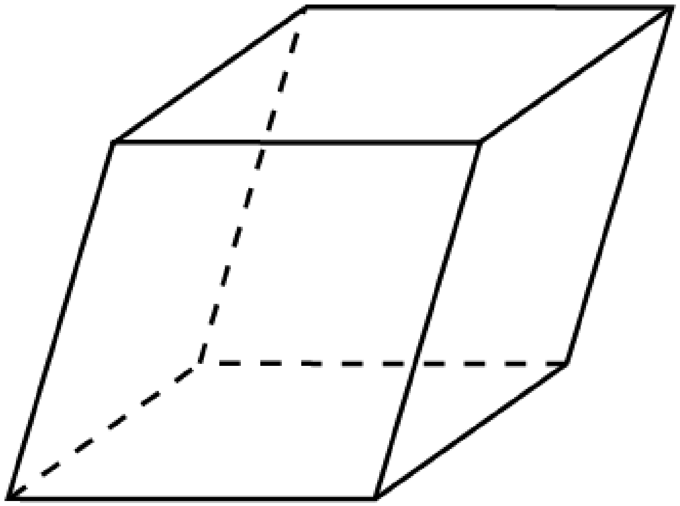
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть больше 100, а объем параллелепипеда быть меньше 1?



Ответ: Да.

Упражнение 26

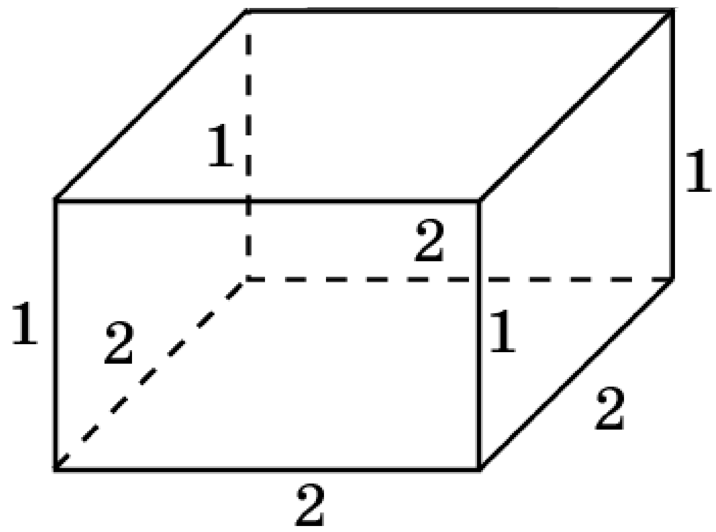
Сколько имеется плоскостей, делящих параллелепипед на две равновеликие части?



Ответ: Бесконечно много.

Упражнение 27

Четыре грани параллелепипеда – прямоугольники со сторонами 1 и 2. Какой наибольший объем может иметь этот параллелепипед?

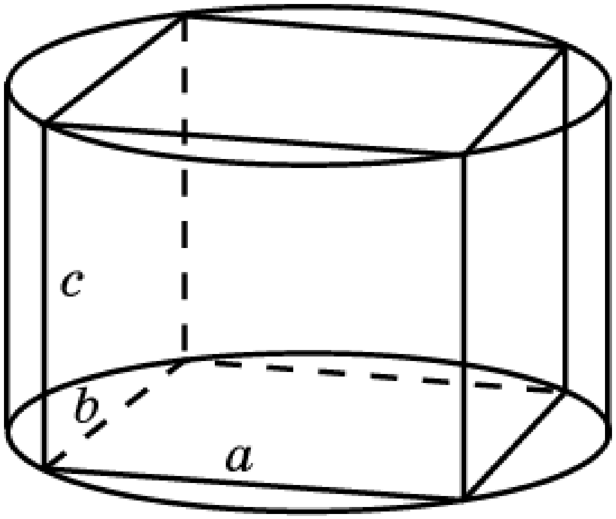


Решение. Искомым параллелепипедом является прямоугольный параллелепипед, у которого две оставшиеся грани – квадраты со стороной 2. Его объем равен 4.

Ответ: 4.

Упражнение 28

Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, вписанный в прямой цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1?

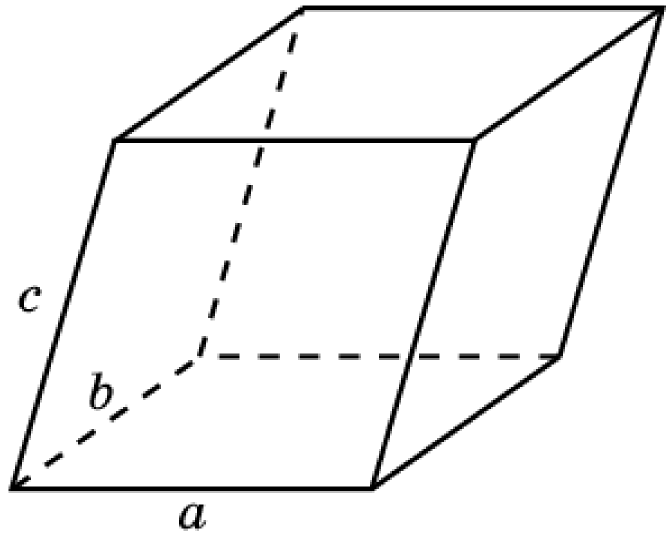


Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины a, b, c. Заметим, что $c = 1$ и $a^2 + b^2 = 4$. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического и, следовательно, имеет место неравенство $ab \leq 2$. Значит, наибольший объем равен 2 в случае, если $a = b = \sqrt{2}, c = 1$.

Ответ: 2.

Упражнение 29

Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?

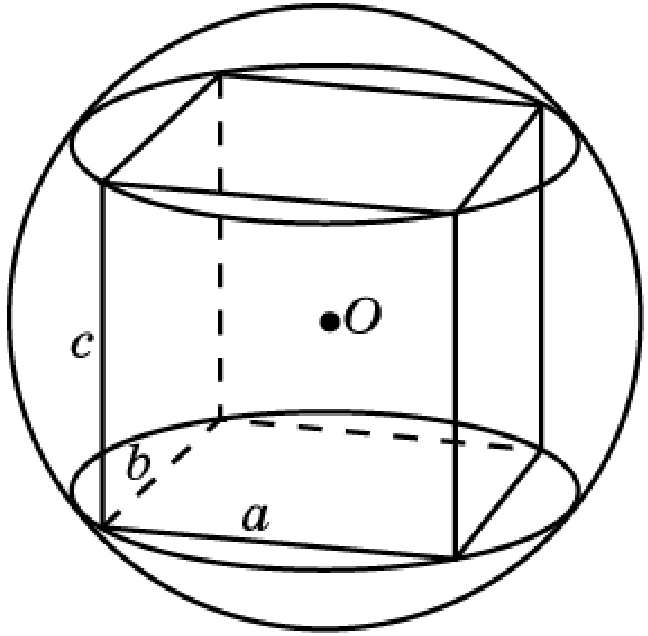


Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины a, b, c. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб со стороной $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

Упражнение 30

Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, вписанный в сферу радиуса 1?



Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины *a*, *b*, *c*. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$. Следовательно, имеет место неравенство $abc \le \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. Значит, наибольший объем равен $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$. в случае, если параллелепипед – куб.

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.