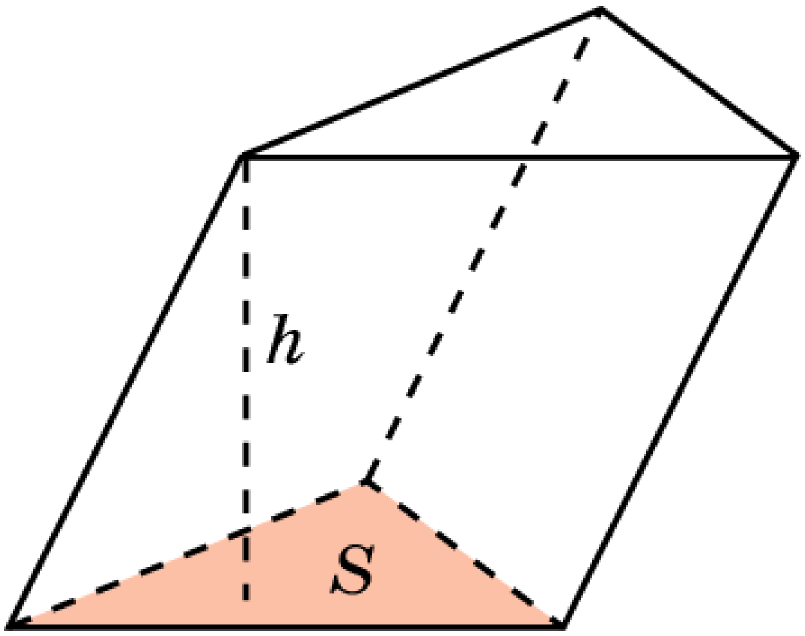
ОБЪЕМ ПРИЗМЫ 1

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания призмы, h – ее высота.

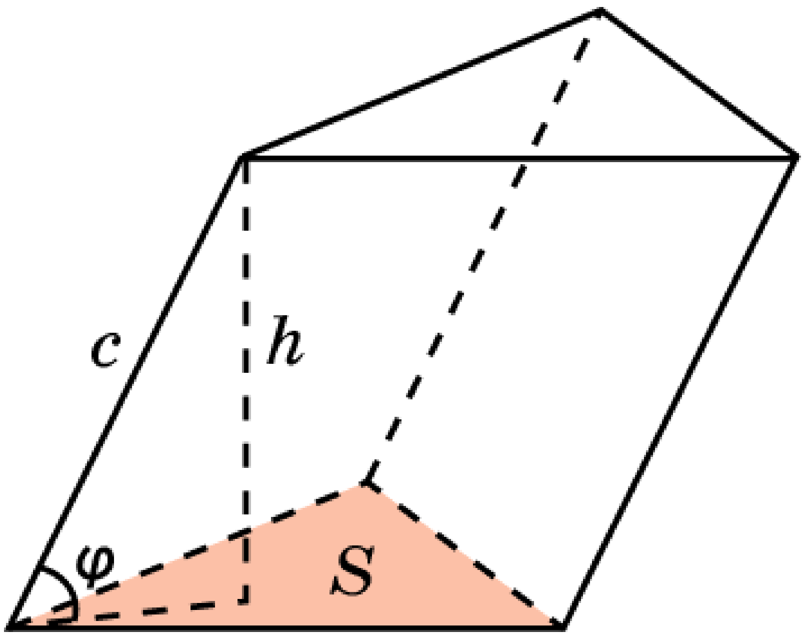


ОБЪЕМ ПРИЗМЫ 2

Если боковое ребро призмы равно c и наклонено к плоскости основания под углом φ, то объем призмы вычисляется по формуле

$$V = S \cdot c \cdot \sin\varphi,$$

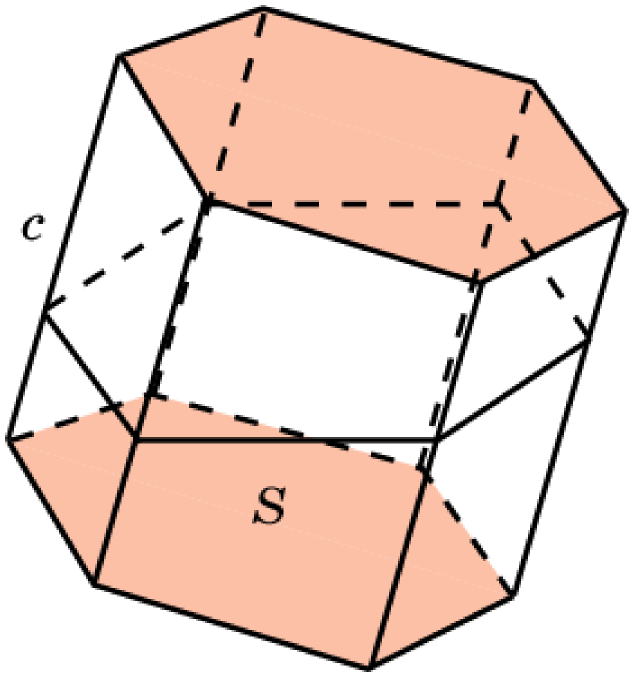
где S – площадь основания призмы.



ОБЪЕМ ПРИЗМЫ 3

Если боковое ребро призмы равно c, а сечением призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является многоугольник площади S, то объем призмы вычисляется по формуле

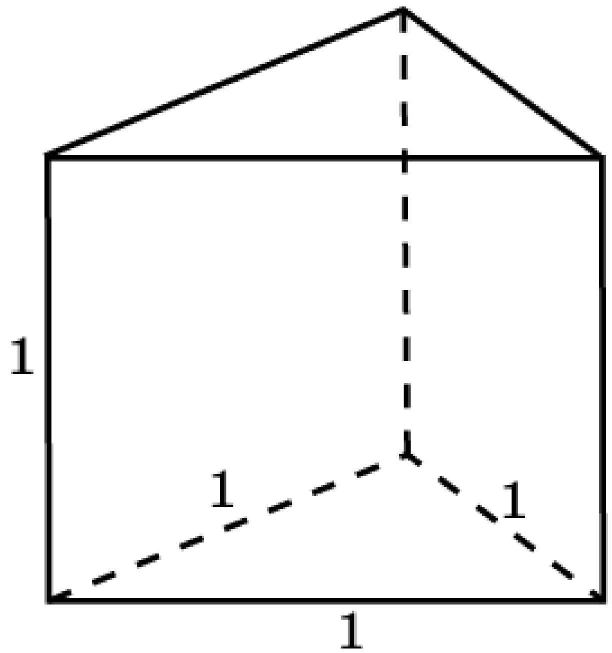
$$V = S \cdot c.$$



Действительно, если призму разрезать по сечению, и нижнюю часть параллельно перенести, поставив на верхнюю, то получим прямую призму с основанием площади S и боковым ребром c.

Упражнение 1

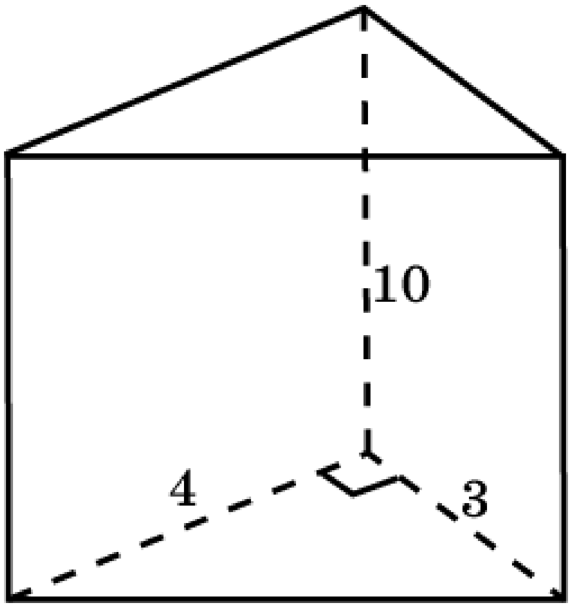
Найдите объем правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 2

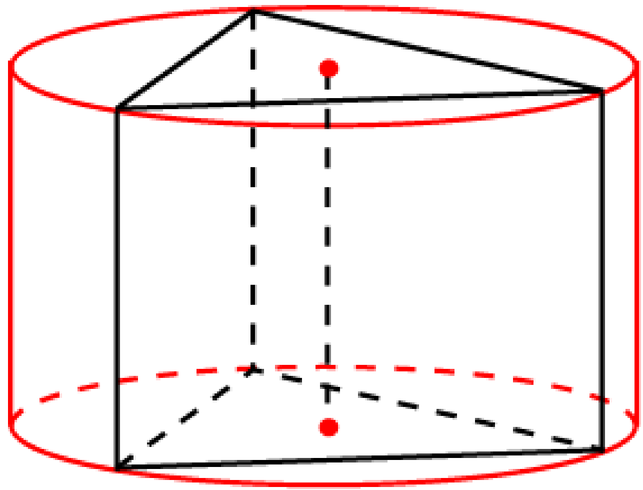
Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, боковое ребро равно 10 см. Найдите объем призмы.



Ответ: 60 см^3.

Упражнение 3

Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1.



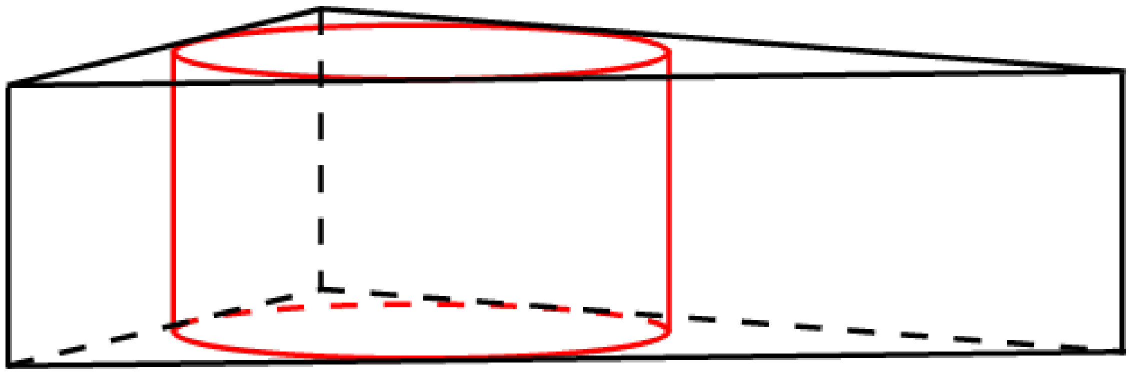
Решение. Сторона основания призмы равна $\sqrt{3}$. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 4

Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.

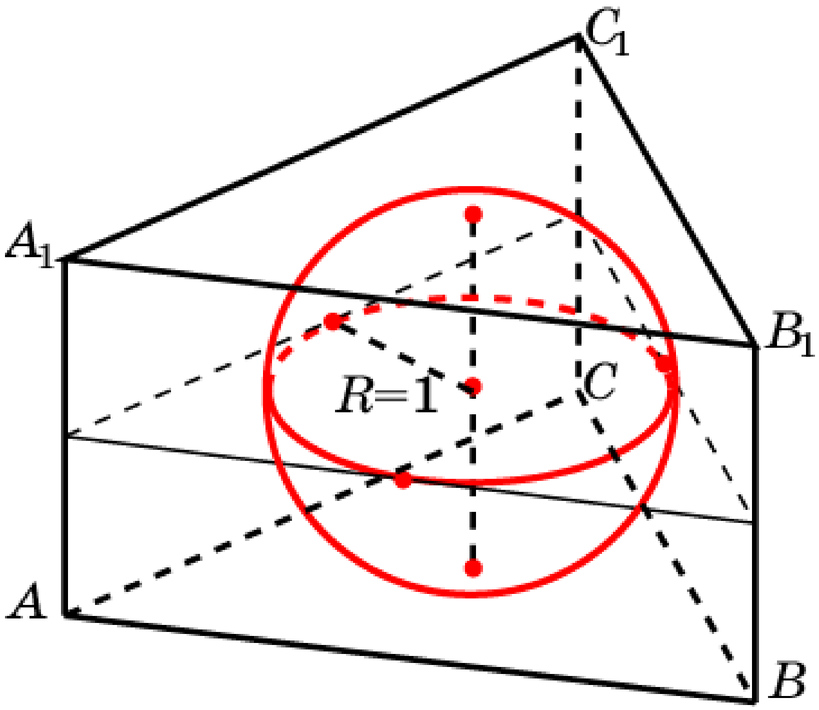


Решение. Сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $3\sqrt{3}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Упражнение 5

Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около единичной сферы.

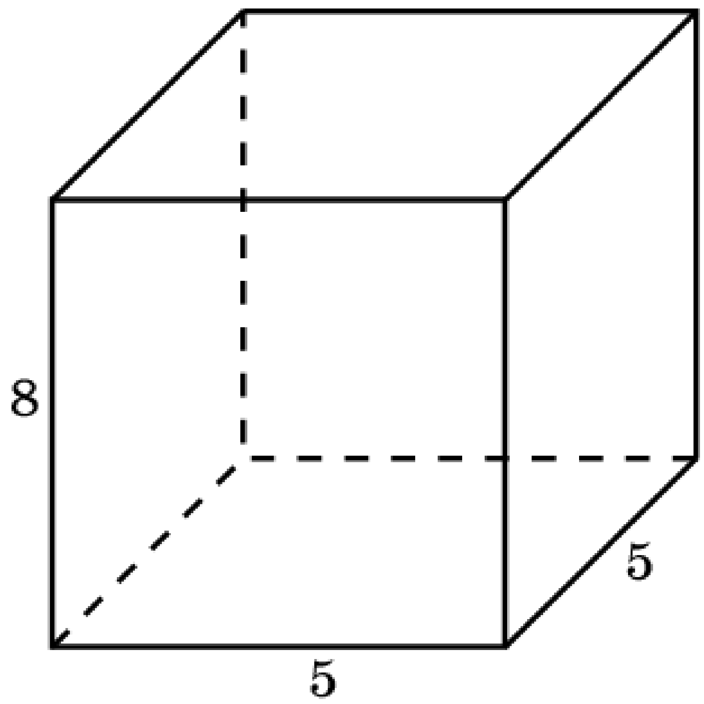


Решение. Сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $3\sqrt{3}$. Высота призмы равна 2. Следовательно, объем призмы равен $6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Упражнение 6

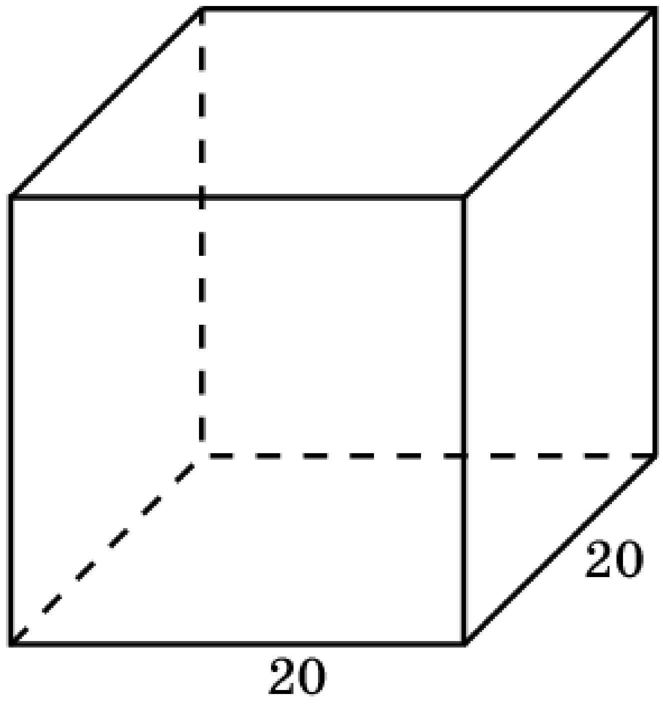
Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а боковое ребро 8 см.



Ответ: 200 см^3.

Упражнение 7

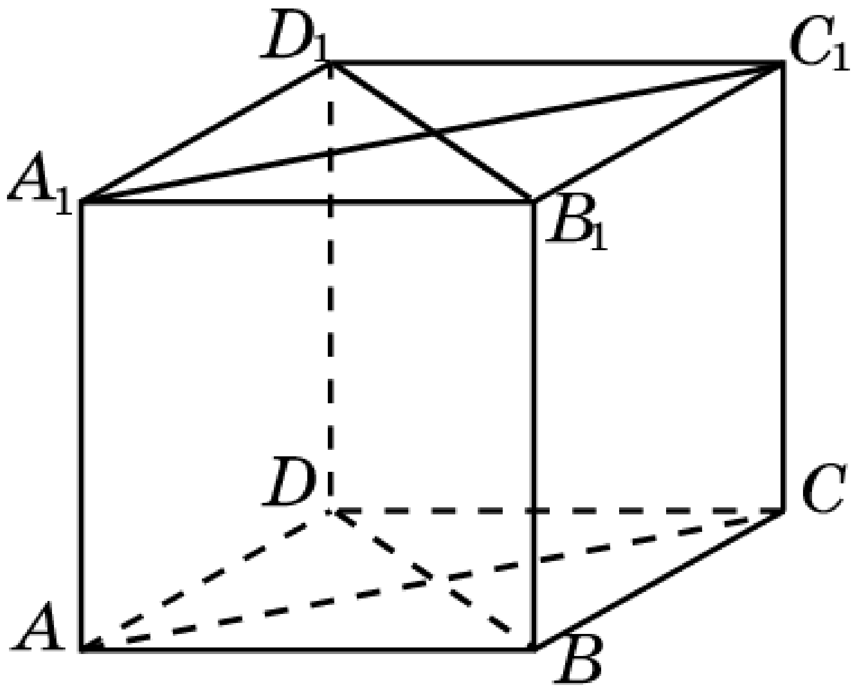
Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см, а объем 4800 см^2.



Ответ: 12 см.

Упражнение 8

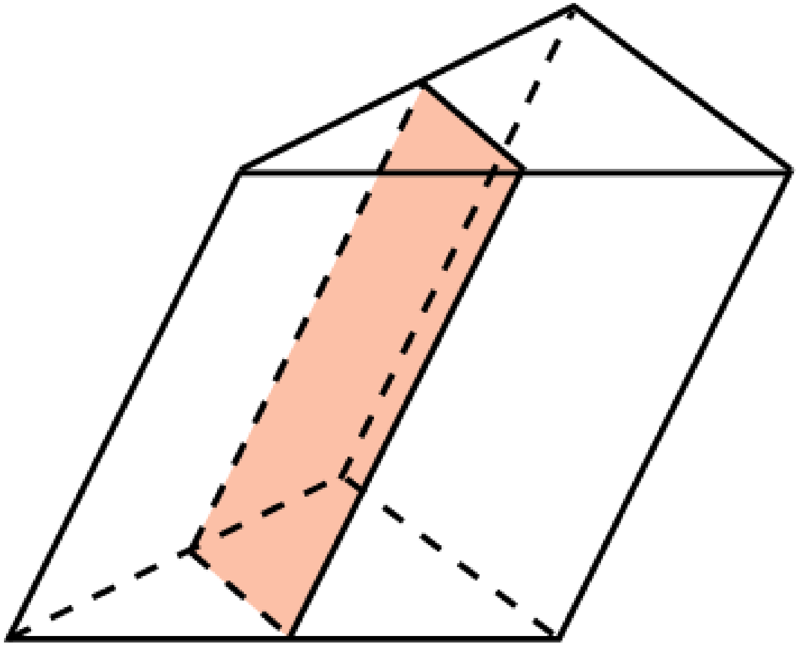
Основание прямой призмы – ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем призмы.



Ответ: 3 м^3.

Упражнение 9

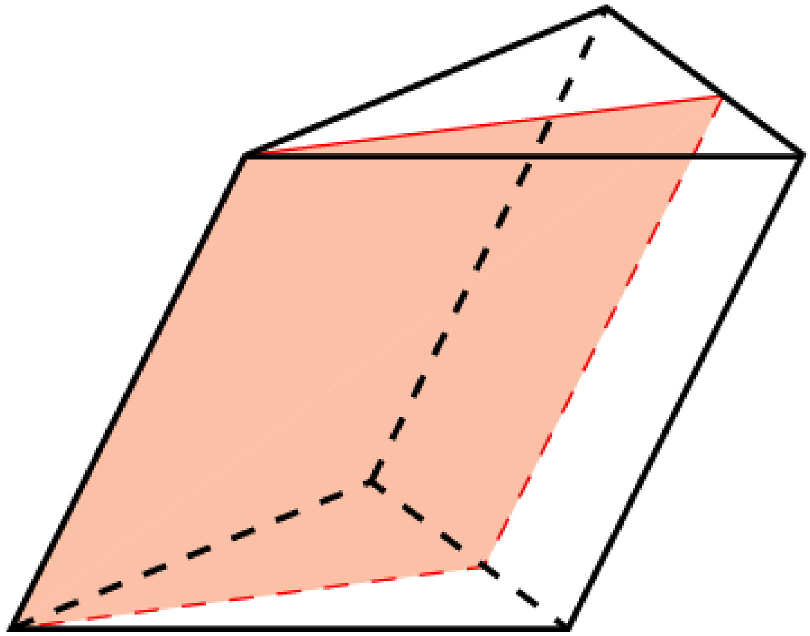
Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: 1:3.

Упражнение 10

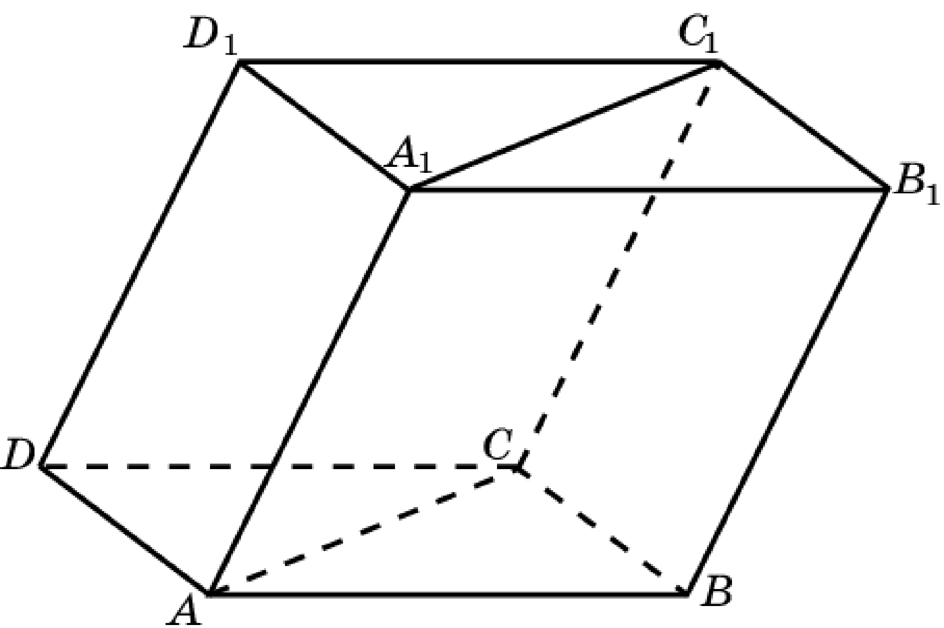
Треугольная призма пересечена плоскостью, которая проходит через боковое ребро и делит площадь противолежащей ему боковой грани в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: $m : n$.

Упражнение 11

В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна Q, а расстояние от нее до противоположного ребра равно d. Найдите объем призмы.

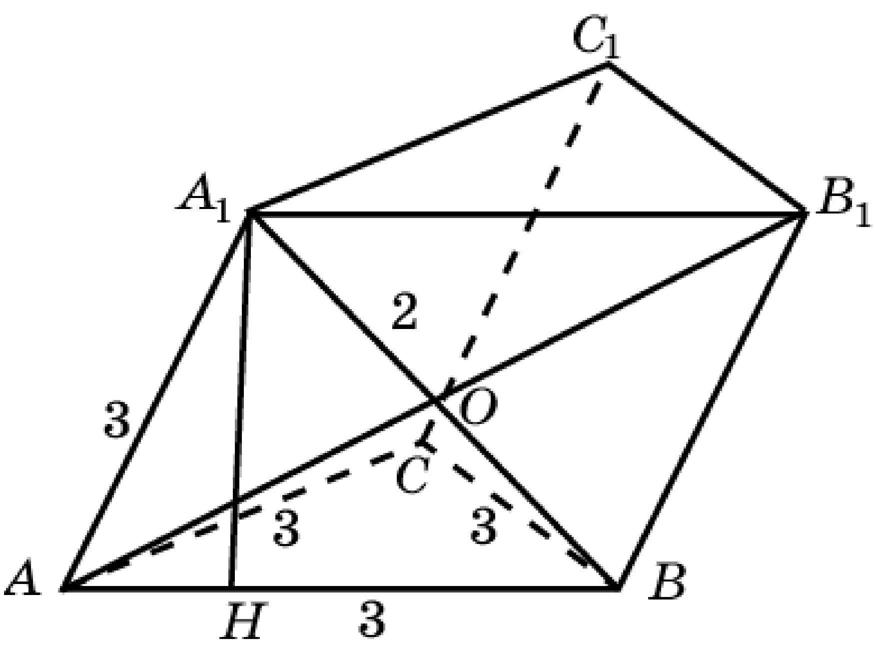


Решение. Пусть площадь грани BCC_1B_1 равна Q. Расстояние от этой грани до прямой AA_1 равно d. Достроим призму до параллелепипеда $A\ldots D_1$. Его объем равен Qd. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{1}{2}Q\cdot d$.

Ответ: $\frac{1}{2}Q\cdot d$.

Упражнение 12

Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной 3. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна 2. Найдите объем призмы.

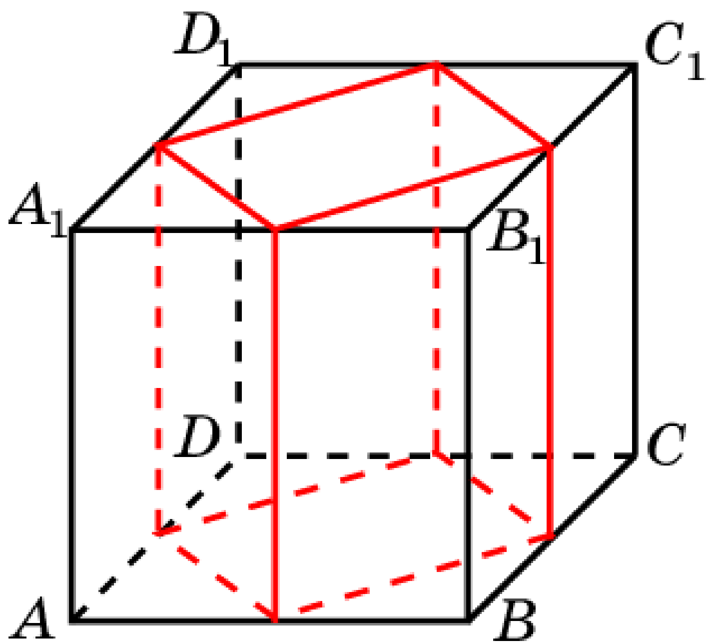


Решение. Проведем диагональ AB_1. Имеем: $AO = 2\sqrt{2}$, площадь ромба ABB_1A_1 равна $4\sqrt{2}$, высота A_1H равна $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Упражнение 13

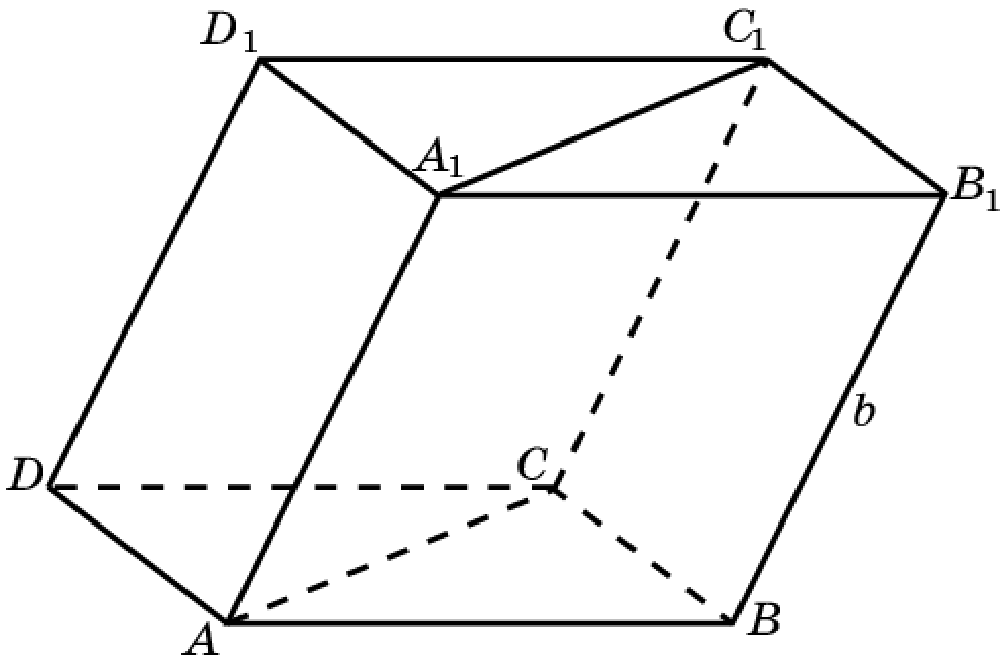
От единичного куба $A\ldots D_1$ отсечены четыре треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани $ABCD$, параллельно ребру AA_1. Найдите объем оставшейся части.



Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Упражнение 14

В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное a. Площади этих граней равны S_1 и S_2. Найдите объем призмы.



Решение. Достроим призму до параллелепипеда $A \ldots D_1$.

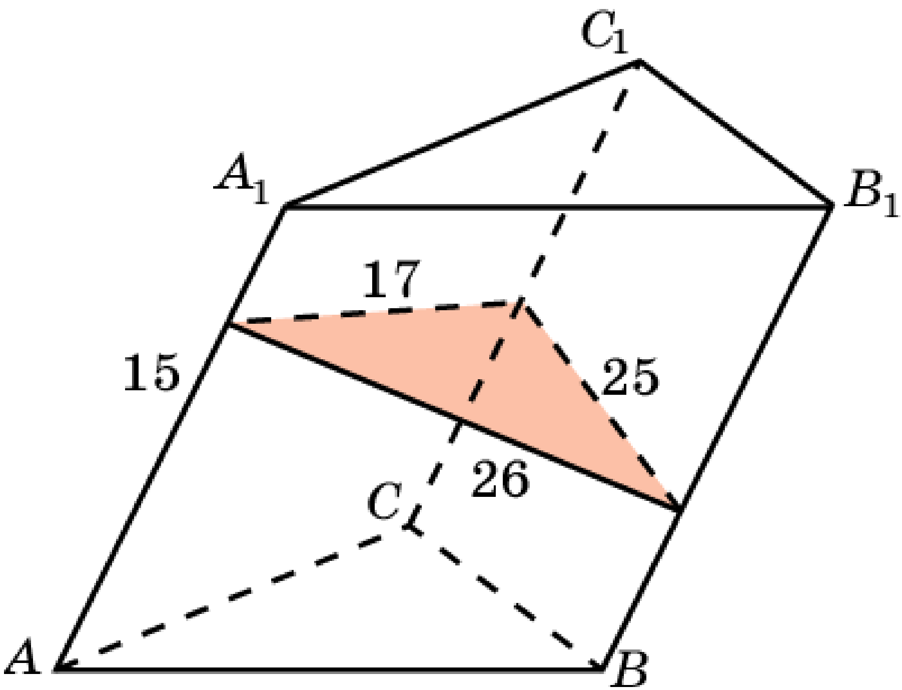
Его объем равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{b}$.

Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Ответ: $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Упражнение 15

Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Найдите объем призмы.

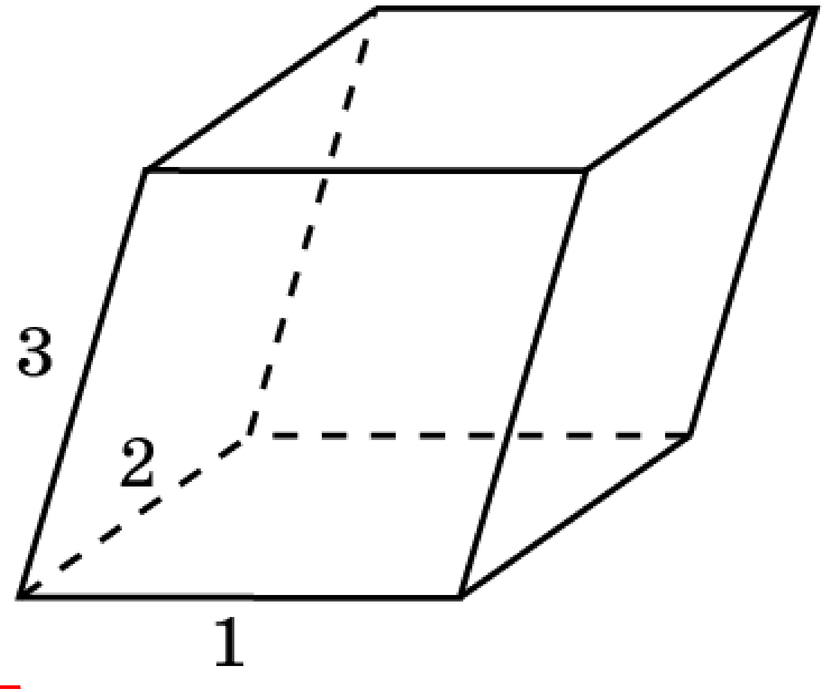


Решение. Проведем сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. Используя формулу Герона найдем площадь сечения. Она равна 204 см^2. Объем призмы равен 3060 см^3.

Ответ: 3060 см^3.

Упражнение 16

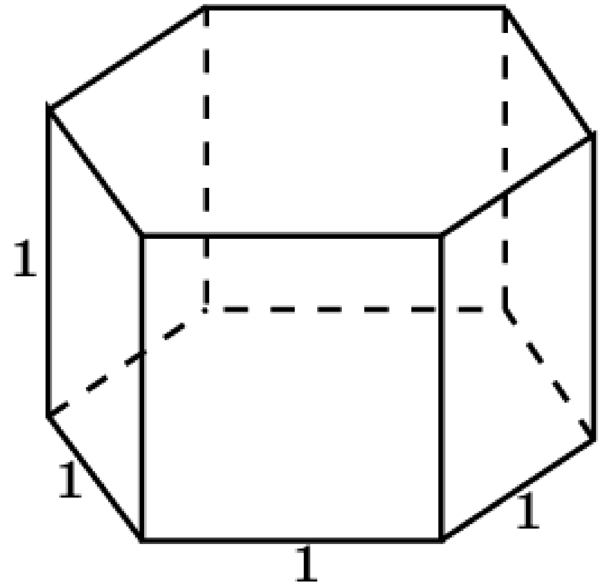
Основанием призмы является параллелограмм со сторонами 1, 2 и острым углом 30°. Боковые ребра равны 3 и составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы.



Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 17

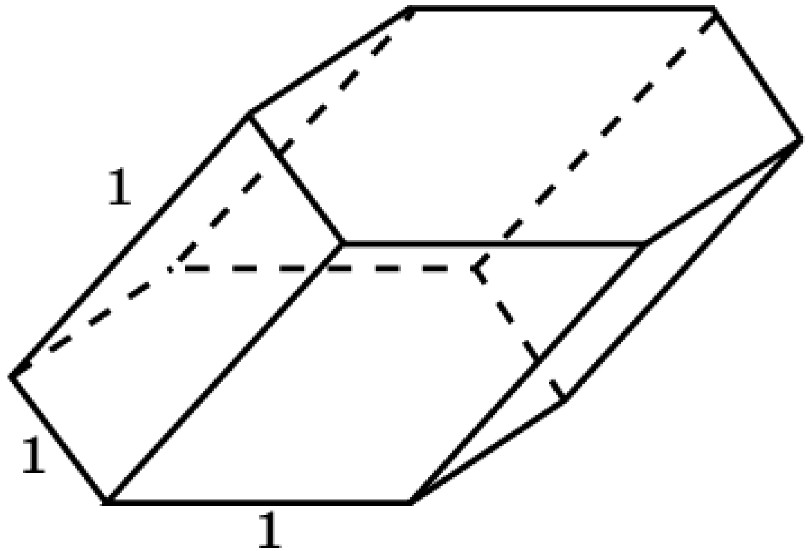
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 18

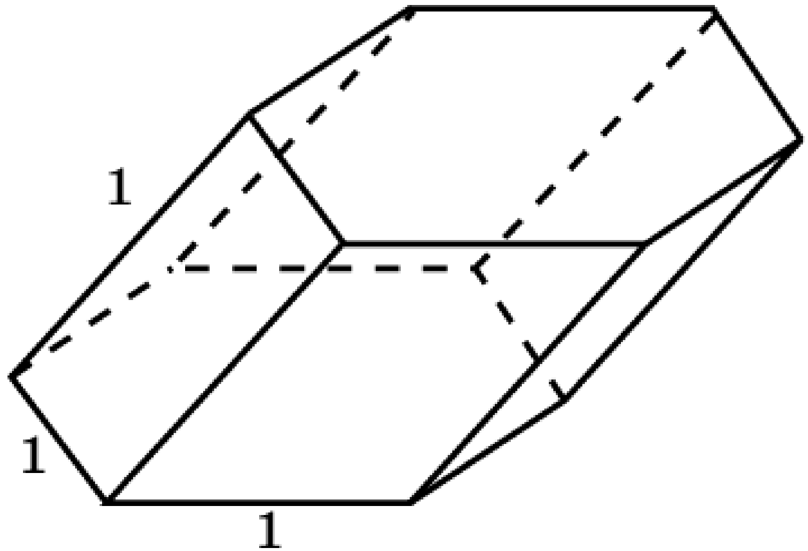
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30^{o}.



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 19

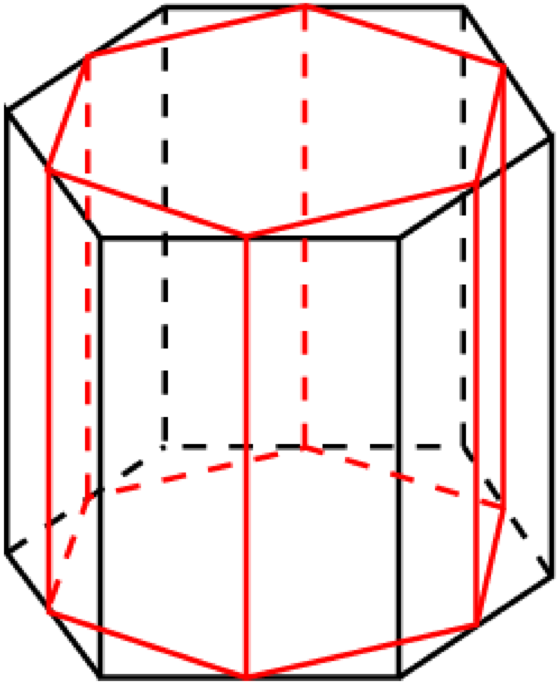
Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 1. Одна из боковых граней является прямоугольником и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем призмы.



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 20

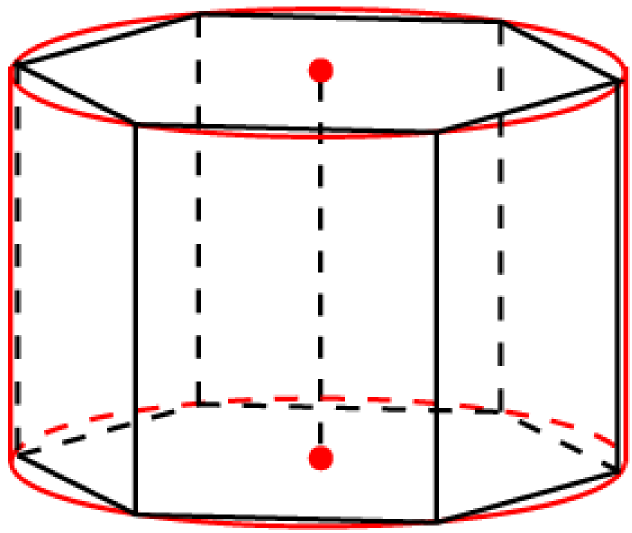
Объем правильной шестиугольной призмы равен V. Найдите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.



Ответ: $\frac{3V}{4}$.

Упражнение 21

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, вписанной цилиндр, радиус основания и высота которого равны 1.



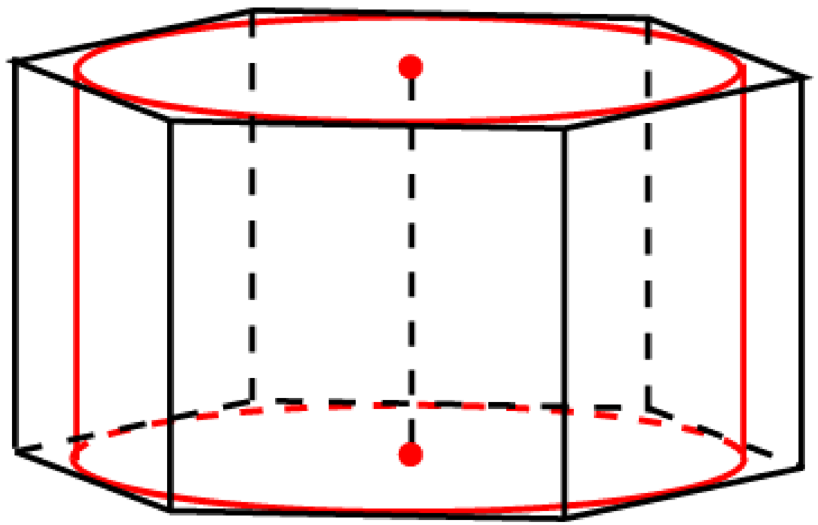
Решение. Сторона основания призмы равна 1. Площадь основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 22

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1.

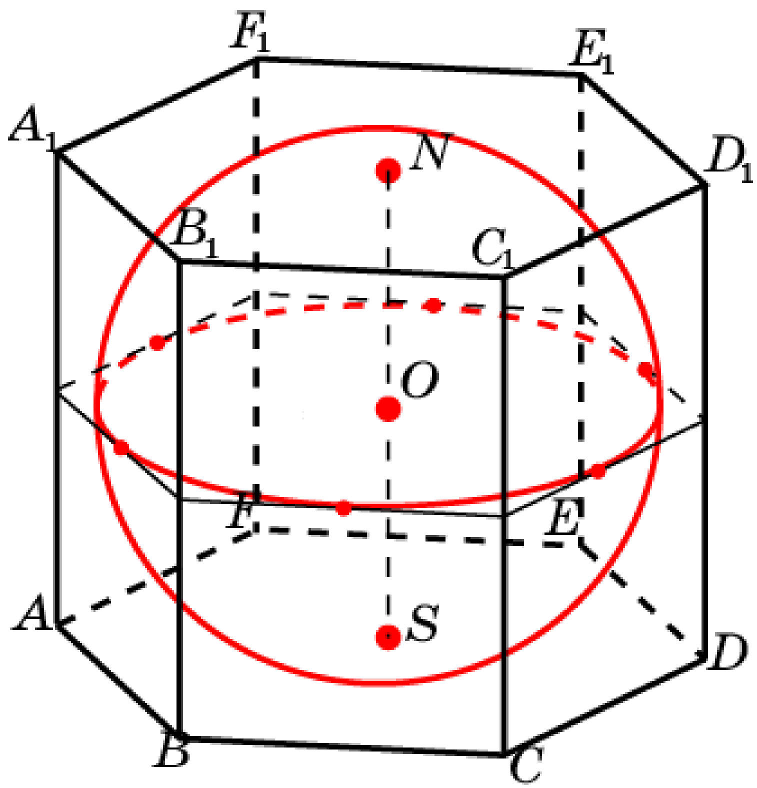


Решение. Сторона основания призмы равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Площадь основания равна $2\sqrt{3}$. Высота призмы равна 1. Следовательно, объем призмы равен $2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Упражнение 23

Найдите объем правильной шестиугольной призмы, описанной около единичной сферы.

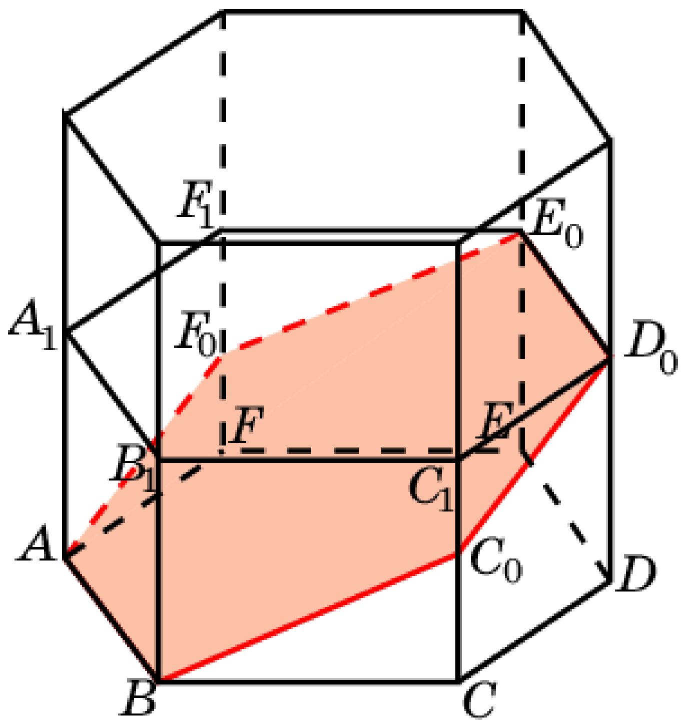


Решение. Сторона основания призмы равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Площадь основания равна $2\sqrt{3}$.
Высота призмы равна 2.
Следовательно, объем призмы равен $4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Упражнение 24

В правильной шестиугольной призме сторона основания равна 1, боковое ребро – 2. Через сторону основания проведено сечение плоскостью под углом 30° к этому основанию. Найдите объем части призмы, отсекаемой этой плоскостью.



Решение. Искомый объем равен половине объема правильной шестиугольной призмы, сторона основания и высота которой равны 1. Следовательно, объем части призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.