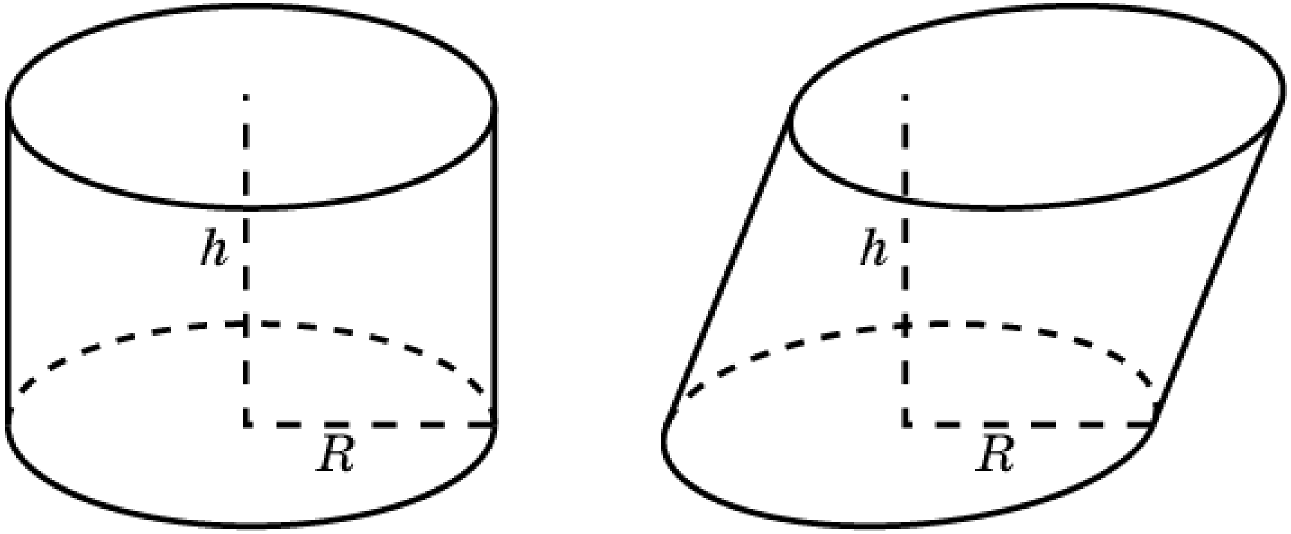
Объем цилиндра

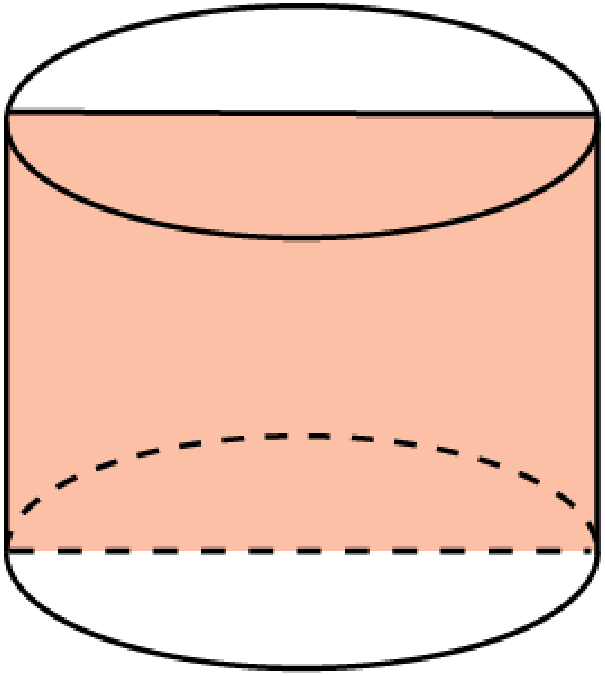
Объем цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$



Упражнение 1

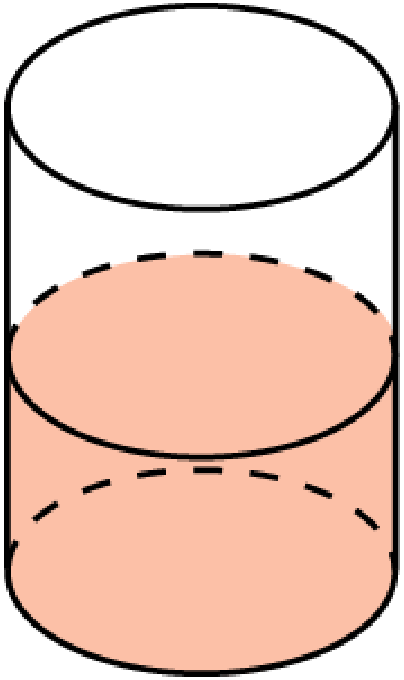
Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной 1 см. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\frac{\pi}{4}$ см^3.

Упражнение 2

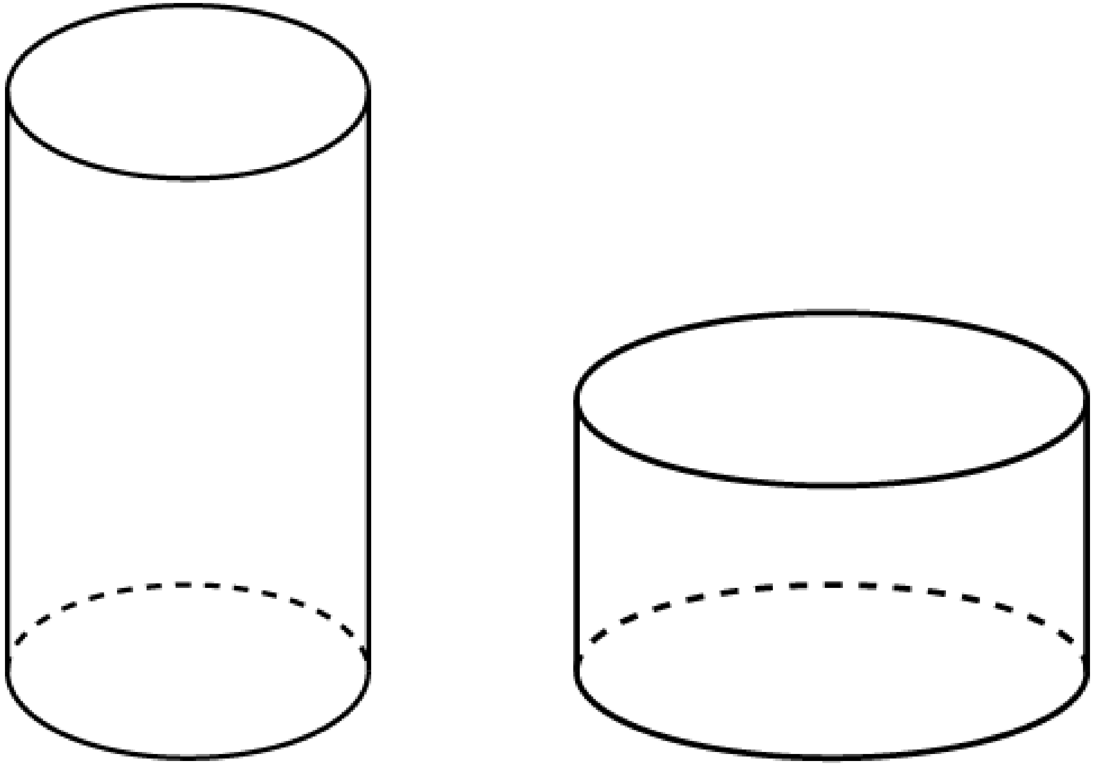
В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?



Ответ: 243π см^3.

Упражнение 3

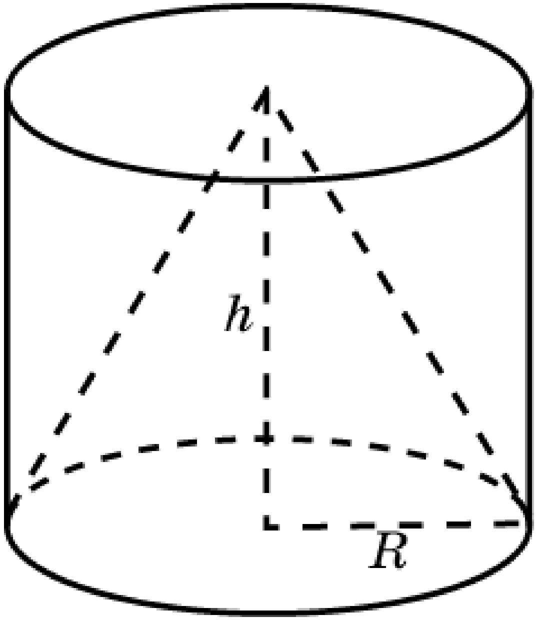
Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?



Ответ: Та, которая шире.

Упражнение 4

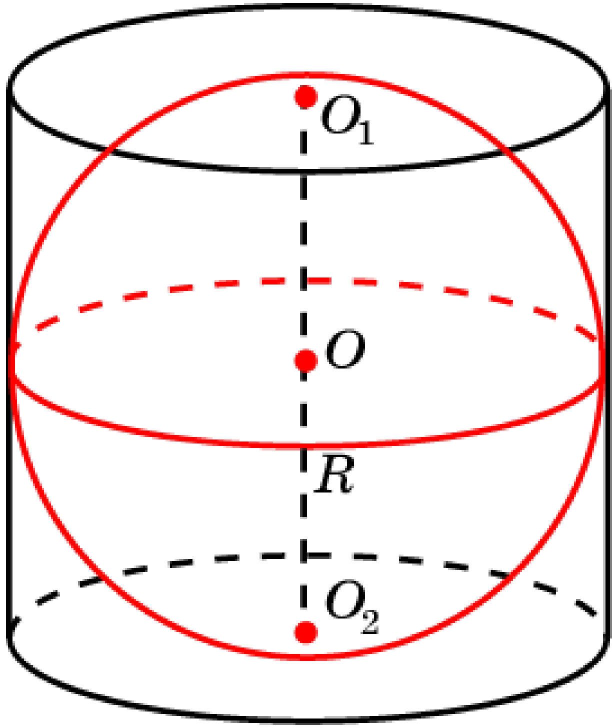
Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40 π см^3.



Ответ: 120π см^3.

Упражнение 5

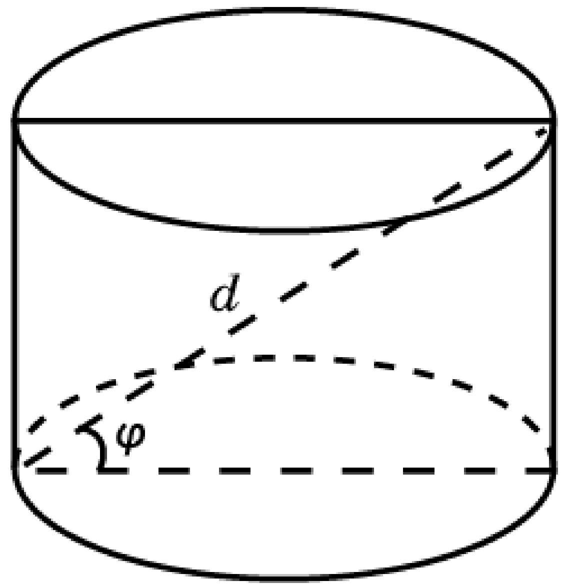
Найдите объем цилиндра, описанного около единичной сферы.



Ответ: 2π.

Упражнение 6

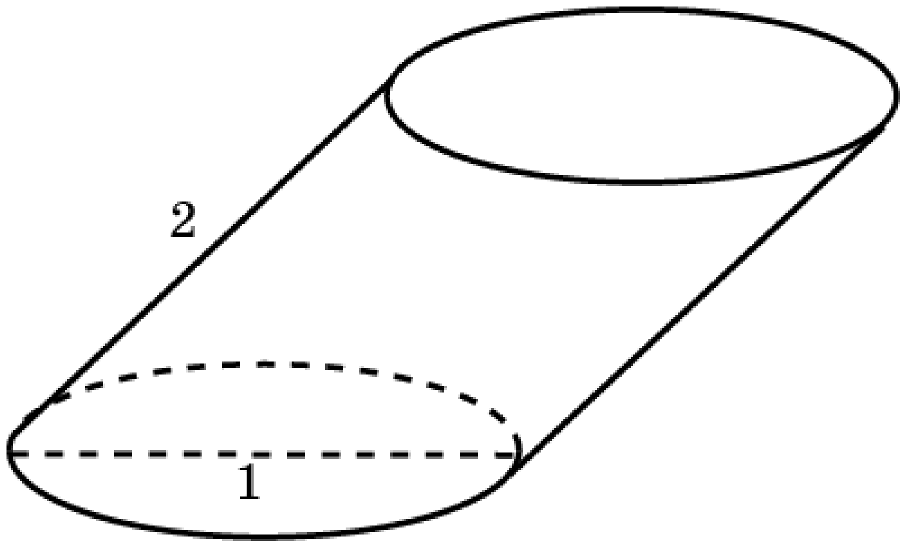
Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $V = \dfrac{\pi \cdot d^3}{4} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi.$

Упражнение 7

Диаметр основания цилиндра равен 1. Образующая равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

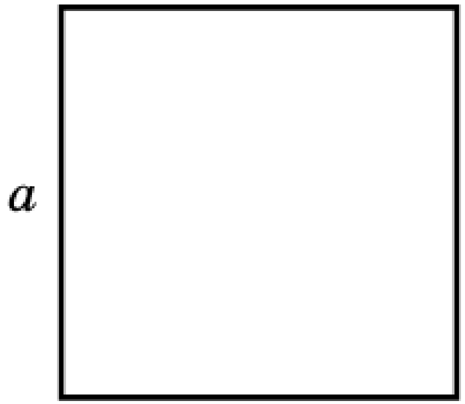
Упражнение 8

Развертка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\dfrac{1}{\pi}$ или $\dfrac{1}{2\pi}$, в зависимости от выбора основания цилиндра.

Упражнение 9

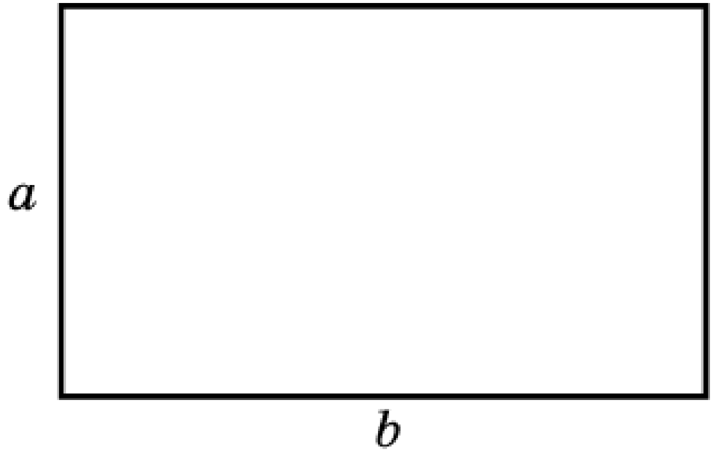
Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.



Ответ: $\pi \cdot a^3$.

Упражнение 10

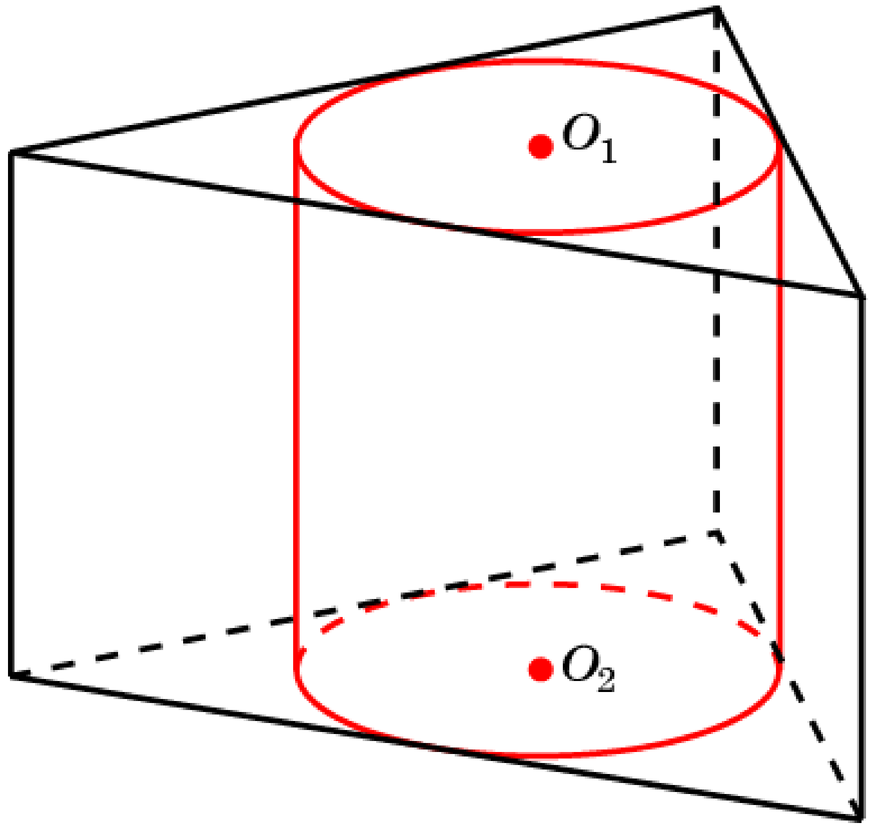
Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон *a* и *b*. Как относятся объемы цилиндров?



Ответ: $a : b$.

Упражнение 11

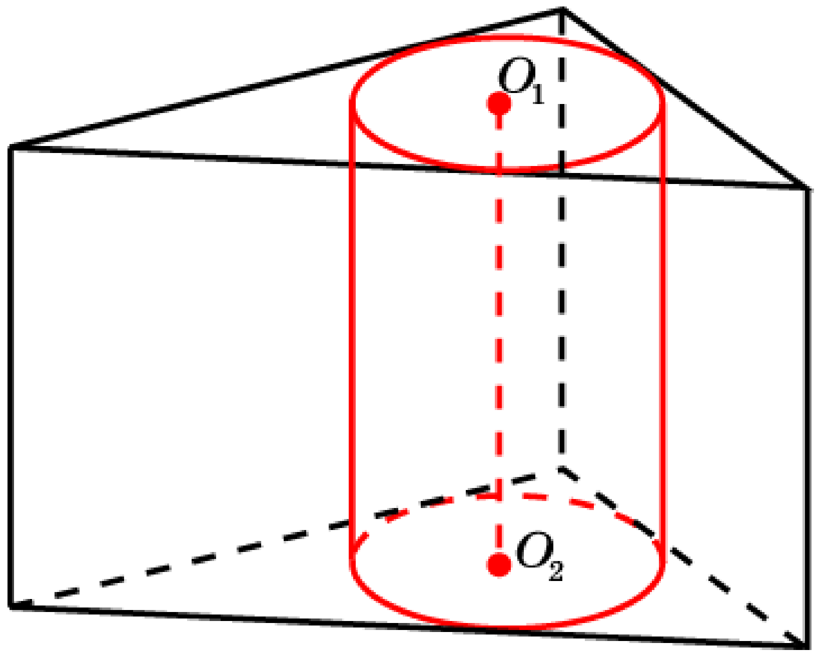
В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1. Боковые ребра призмы равны 2. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Упражнение 12

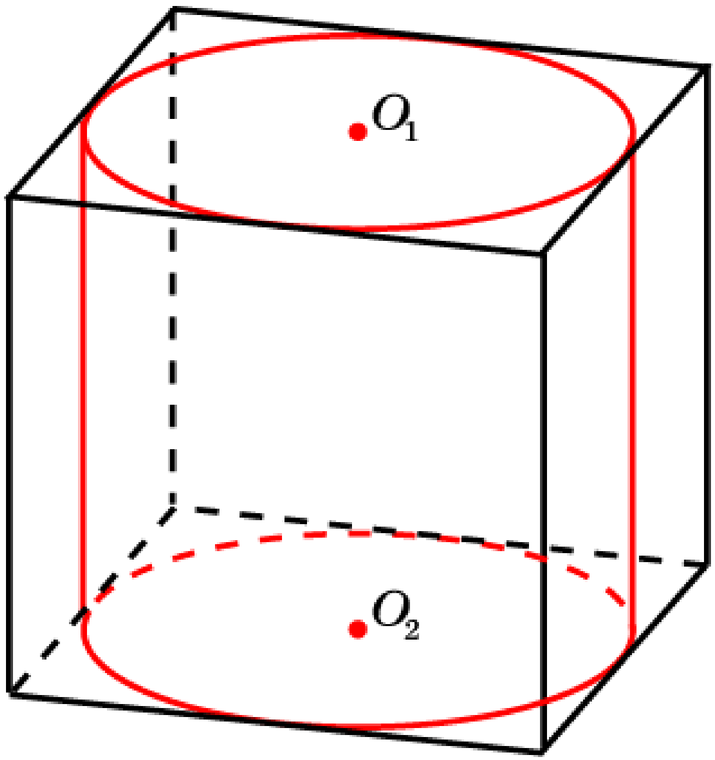
В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра призмы равны 1. Найдите объем цилиндра.



Ответ: 4 π.

Упражнение 13

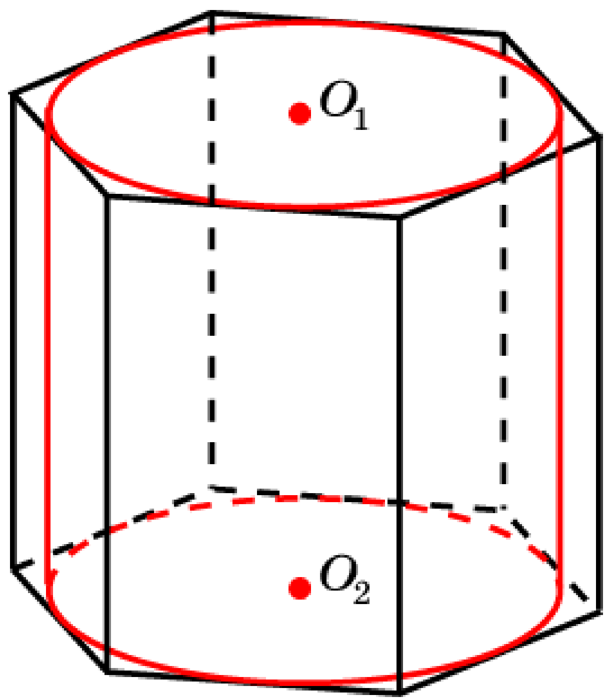
Найдите объем цилиндра, вписанного в единичный куб.



Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Упражнение 14

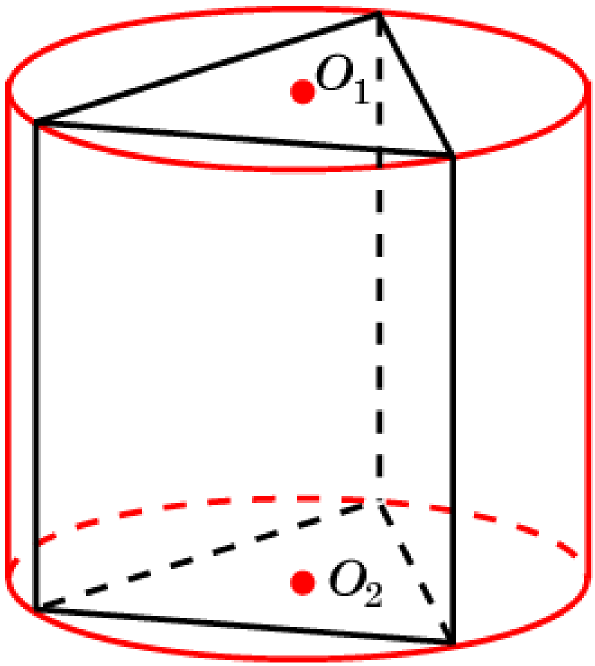
В правильную шестиугольную призму, со стороной основания 1 и боковым ребром 2, вписан цилиндр. Найдите объем этого цилиндра.



Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Упражнение 15

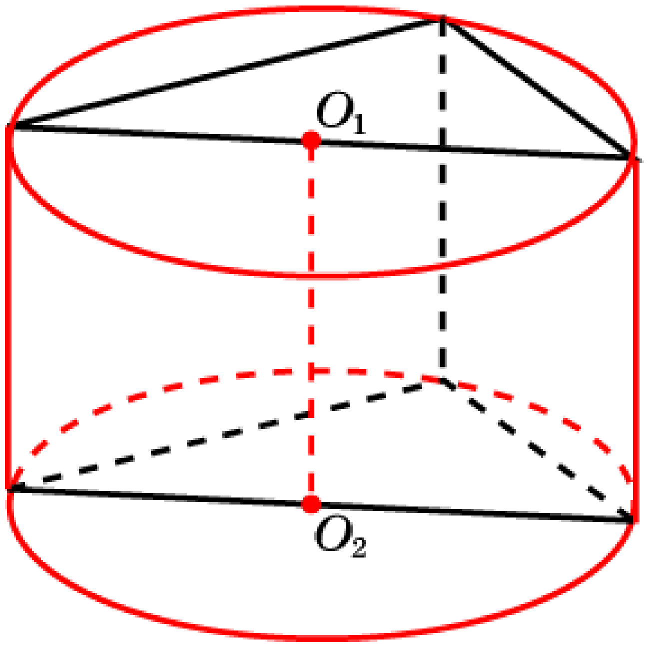
В основании прямой призмы правильный треугольник со стороной 1. Боковые ребра равны 3. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: π.

Упражнение 16

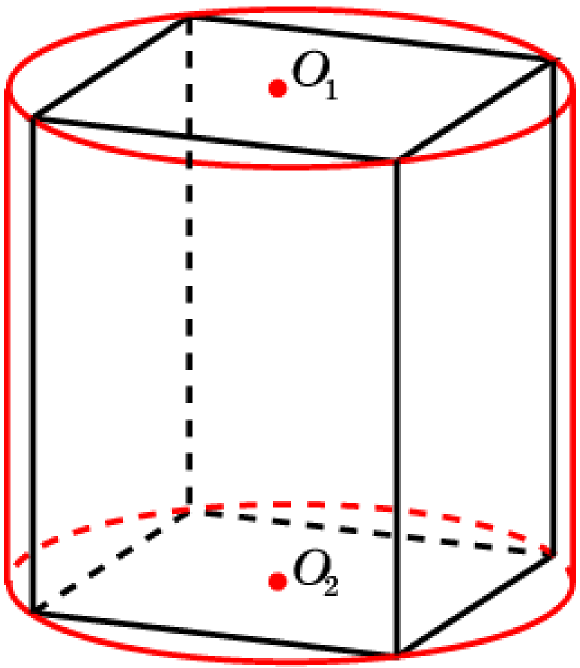
В основании прямой призмы прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 5. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: 125π.

Упражнение 17

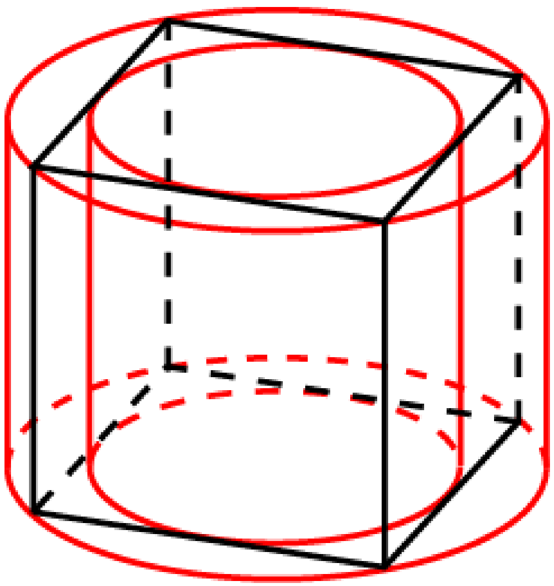
В основании прямой призмы квадрат со стороной 1. Боковые ребра равны 2. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: π.

Упражнение 18

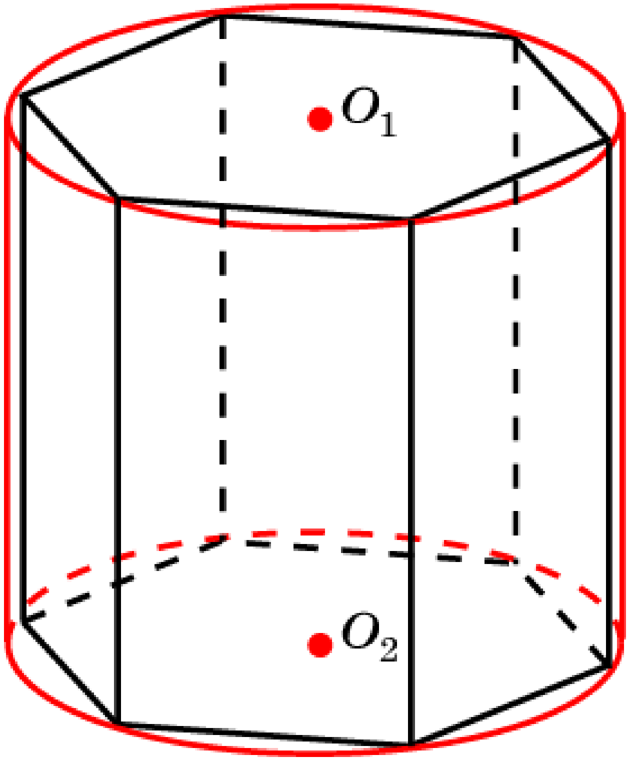
Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?



Ответ: В 2 раза.

Упражнение 19

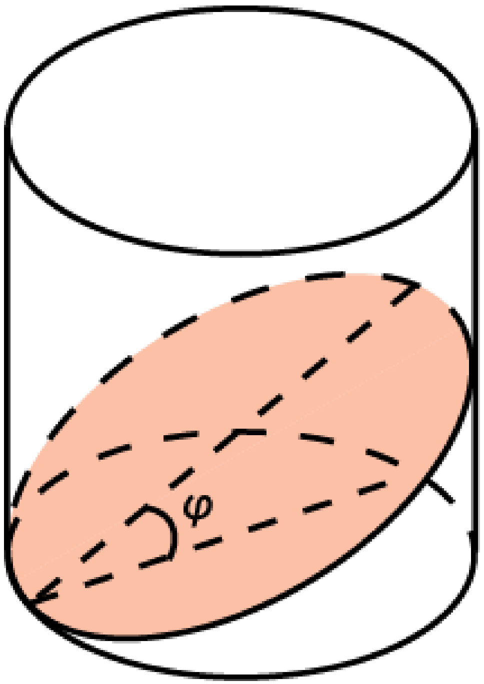
Около правильной шестиугольной призмы, со стороной основания 1, описан цилиндр. Боковые ребра призмы равны 2. Найдите объем этого цилиндра.



Ответ: 2π.

Упражнение 20

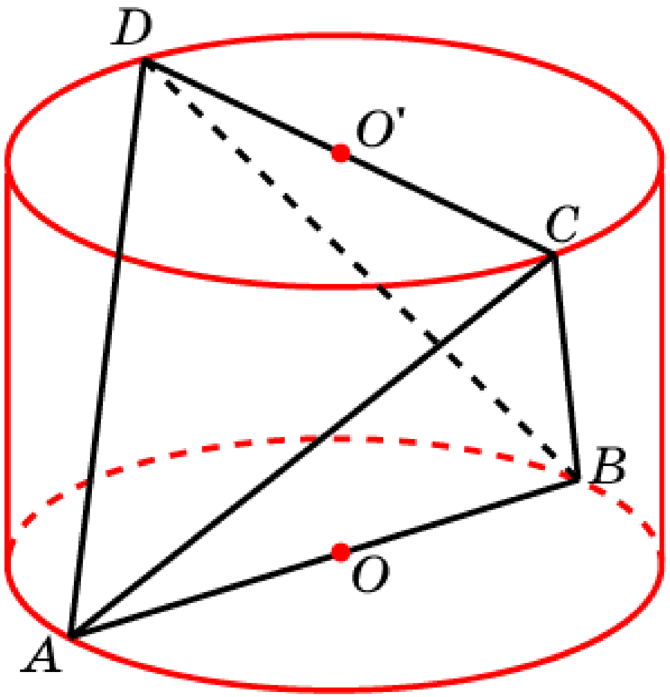
Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен *R*. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.



Ответ: $\pi R^3 \mathrm{tg}\varphi$.

Упражнение 21

Найдите объём цилиндра, зная, что скрещивающиеся рёбра правильного единичного тетраэдра являются диаметрами оснований цилиндра.

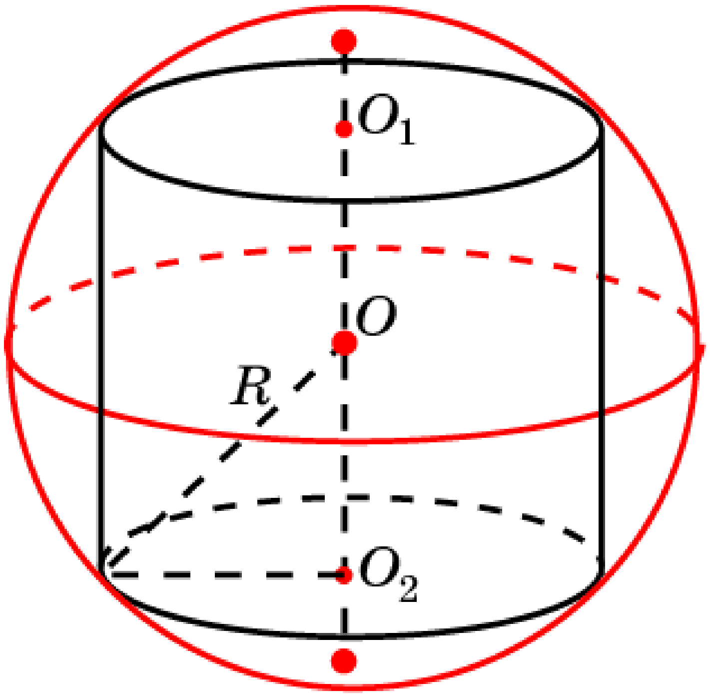


Решение: Площадь основания цилиндра равна $\frac{\pi}{4}$, а образующая равна расстоянию между скрещивающимися рёбрами правильного единичного тетраэдра, оно равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Искомый объём равен $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$. Ответ: $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

Упражнение 22

Какой наибольший объем может иметь цилиндр, вписанный в единичную сферу?

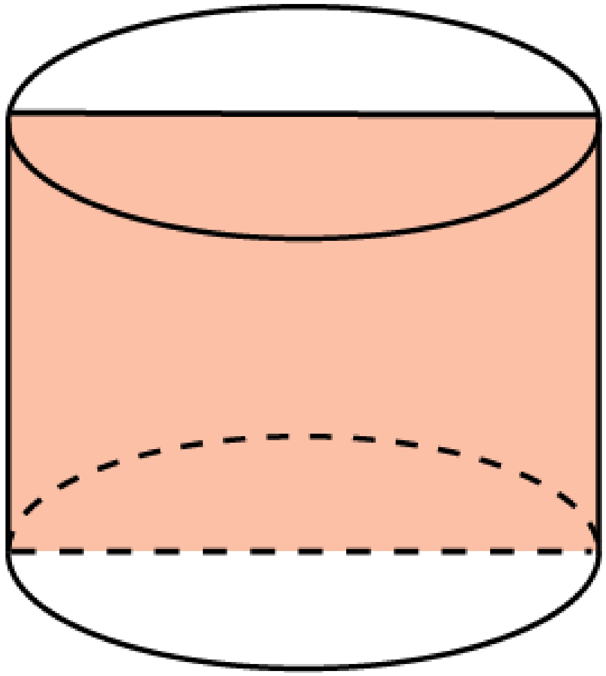


Решение: Обозначим x половину высоты цилиндра. Тогда радиус основания цилиндра будет равен $\sqrt{1-x^2}$. Объем цилиндра равен $\pi(1-x^2)2x$. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)=\pi(1-x^2)2x$. на отрезке [0, 1] воспользуемся производной. Производная $f'(x)=\pi(2-6x^2)$ обращается в ноль в точке $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, в которой функция принимает наибольшее значение, равное $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{\pi 4\sqrt{3}}{9}$.

Упражнение 23

Какой наибольший объем может иметь цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 1?



Решение: Обозначим x диаметр основания цилиндра. Тогда его высота равна $\frac{1}{x}$. Объем цилиндра равен $\frac{\pi x}{4}$.

Функция $f(x) = \frac{\pi x}{4}$ неограниченно возрастает и, следовательно, цилиндра наибольшего объема не существует.

Ответ: Наибольшего объема нет.