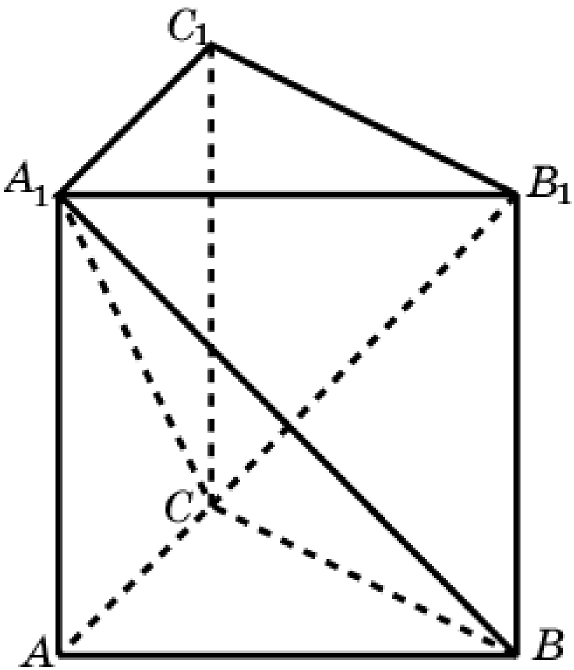
ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Теорема. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.



Доказательство. Рассмотрим случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC треугольная пирамида. Достроим ее до призмы $ABCA_1B_1C_1$. Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы.

Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

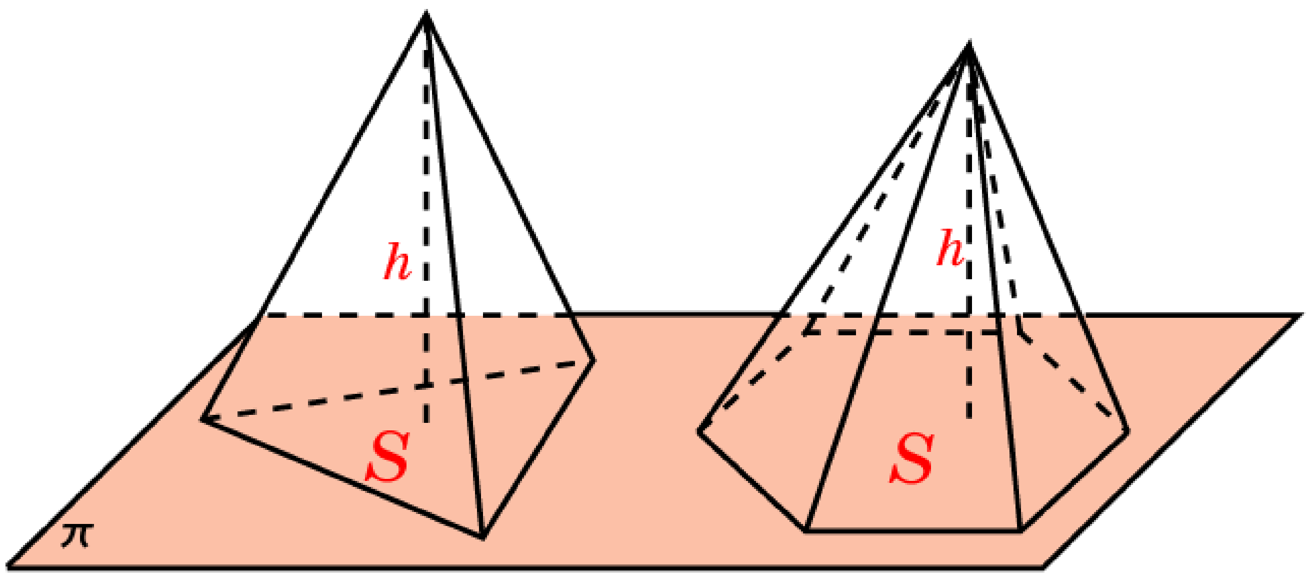
где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой - многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

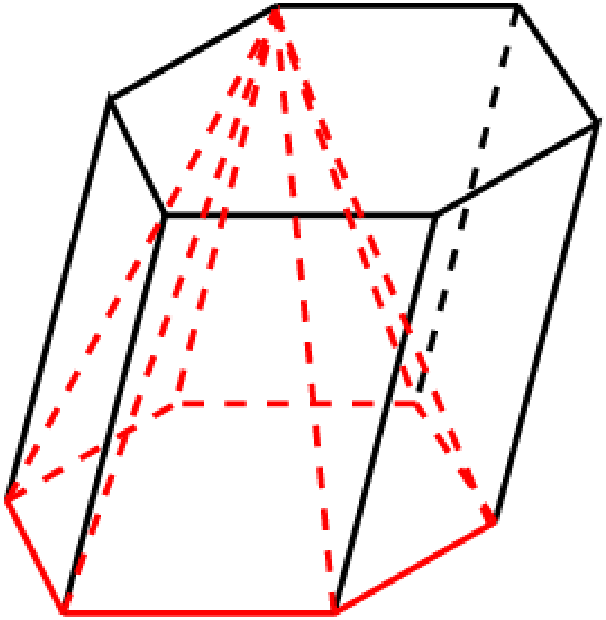
где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.



$$\boxed{V = \frac{1}{3} S \cdot h}$$

Упражнение 1

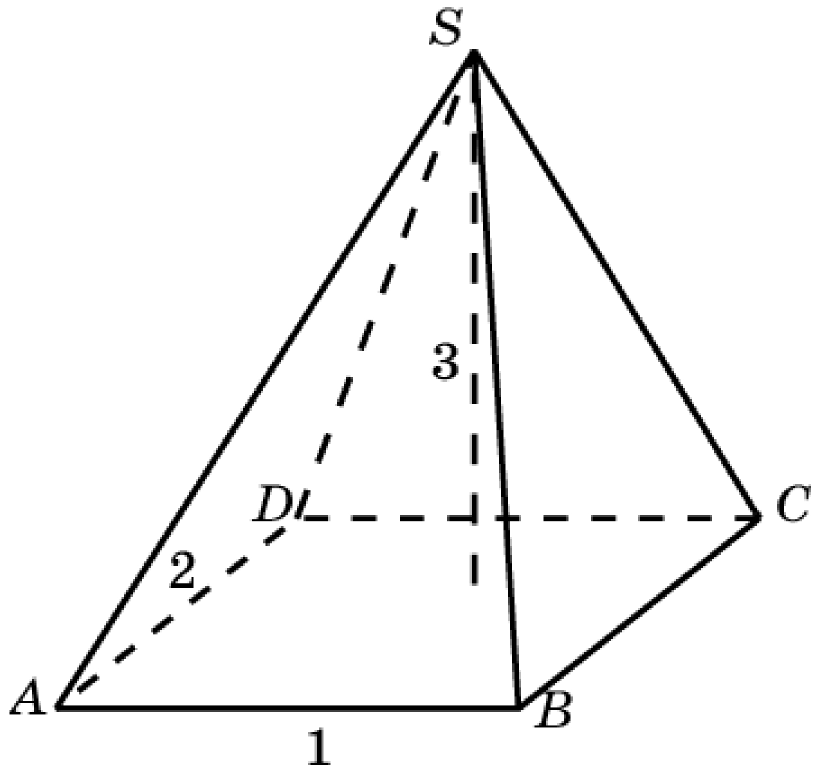
Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?



Ответ: Одна треть.

Упражнение 2

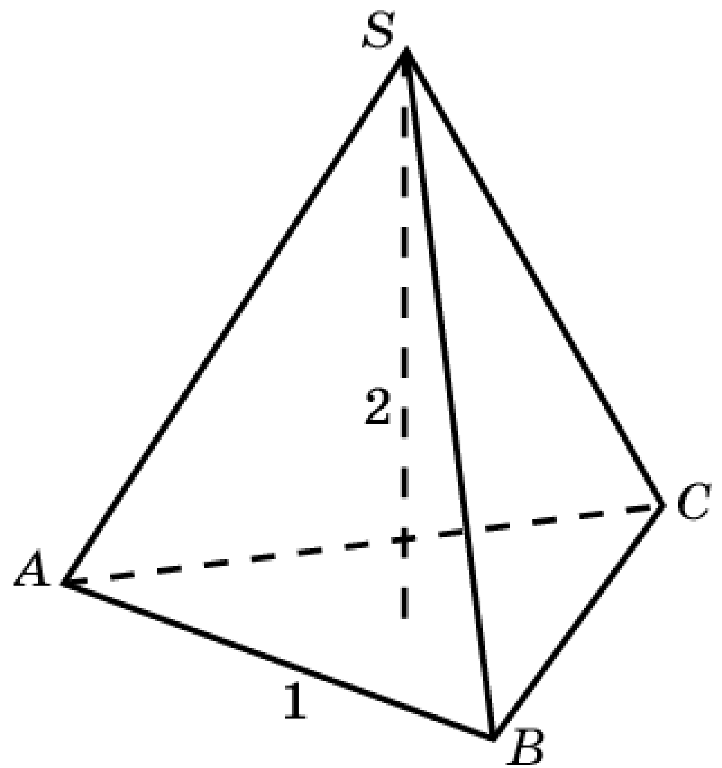
Найдите объем пирамиды, высота которой 3, а в основании - прямоугольник со сторонами 1 и 2.



Ответ: 2.

Упражнение 3

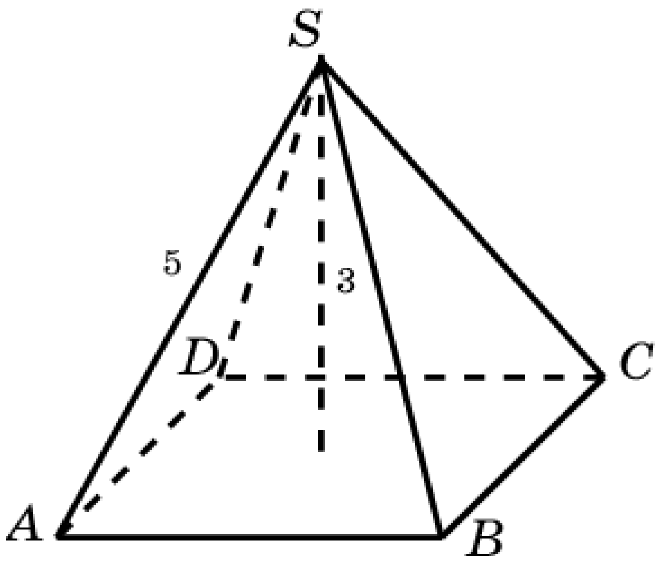
Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, высота – 2.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Упражнение 4

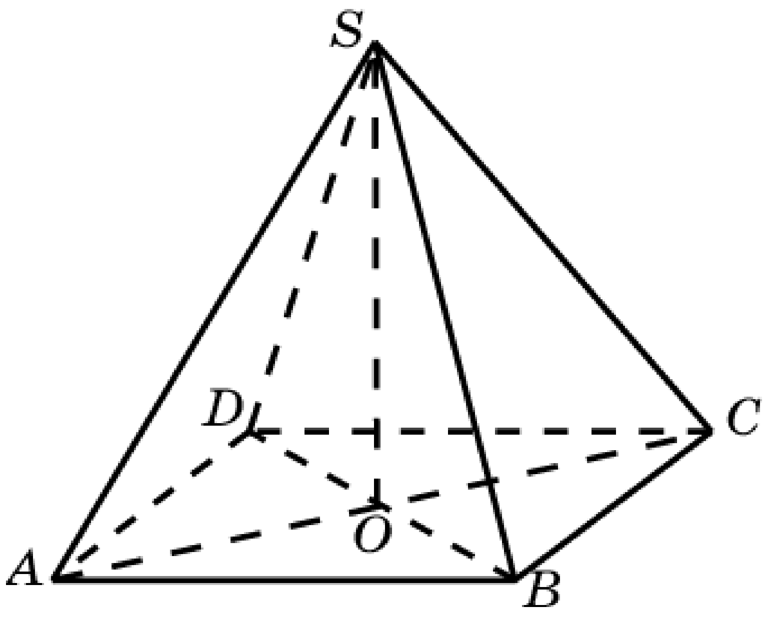
В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.



Ответ: 32 м^3.

Упражнение 5

Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.



Решение. Пусть ACS – правильный треугольник.

Его высота SO равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

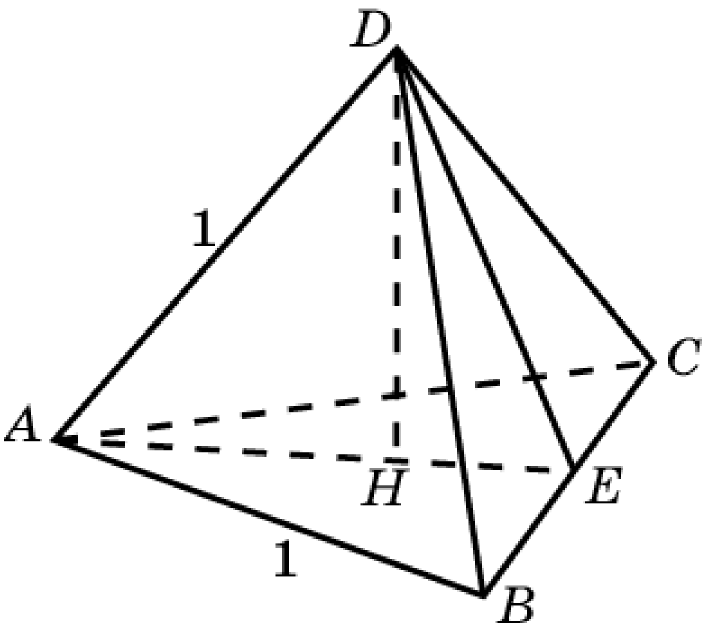
Сторона основания равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 6

Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1.



Решение. Пусть E – середина ребра BC. В треугольнике ADE $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота DH равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

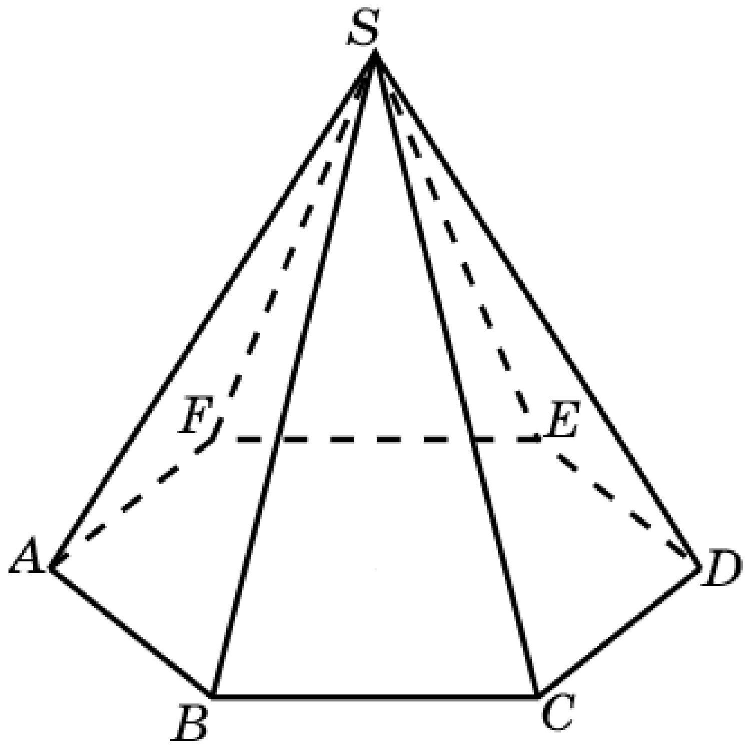
Площадь треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Упражнение 7

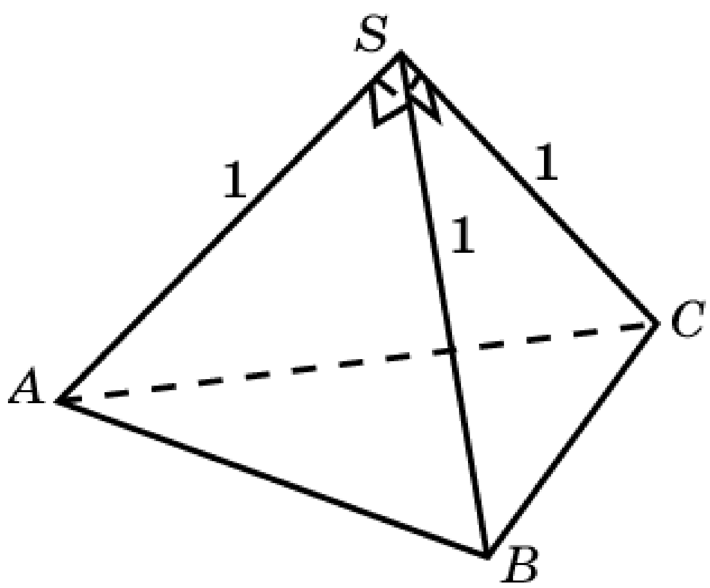
Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3. Сторона основания 1 см. Найдите боковое ребро.



Ответ: 7 см.

Упражнение 8

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 1. Найдите объем пирамиды.



Решение. Примем треугольник ABS за основание пирамиды.

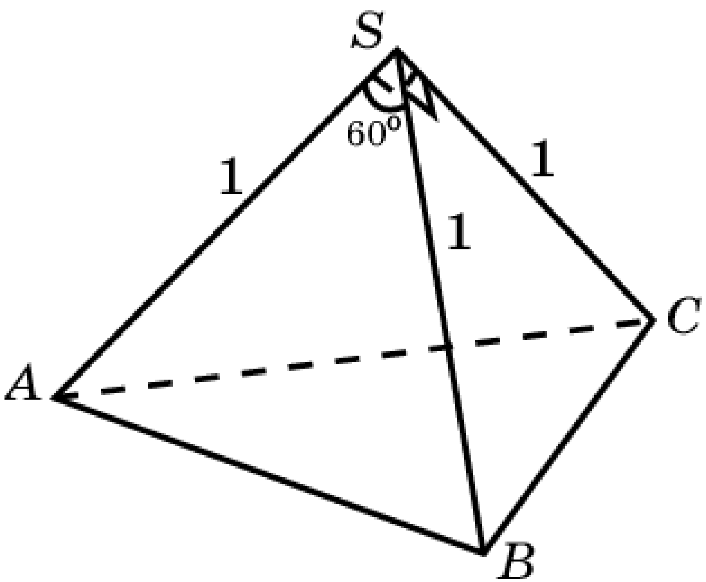
Тогда SC будет высотой.

Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 9

Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна 1, а плоские углы при вершине равны 60°, 90° и 90°.



Решение. Примем треугольник *ABS* за основание пирамиды.

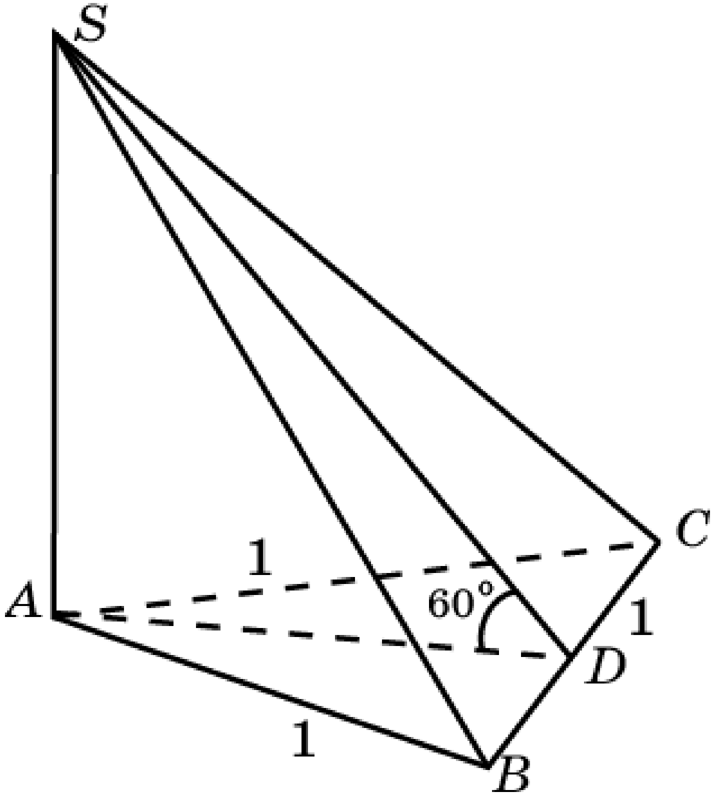
Тогда *SC* будет высотой.

Объем пирамиды равен $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 10

Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60°. Найдите объем пирамиды.



Решение. Площадь треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

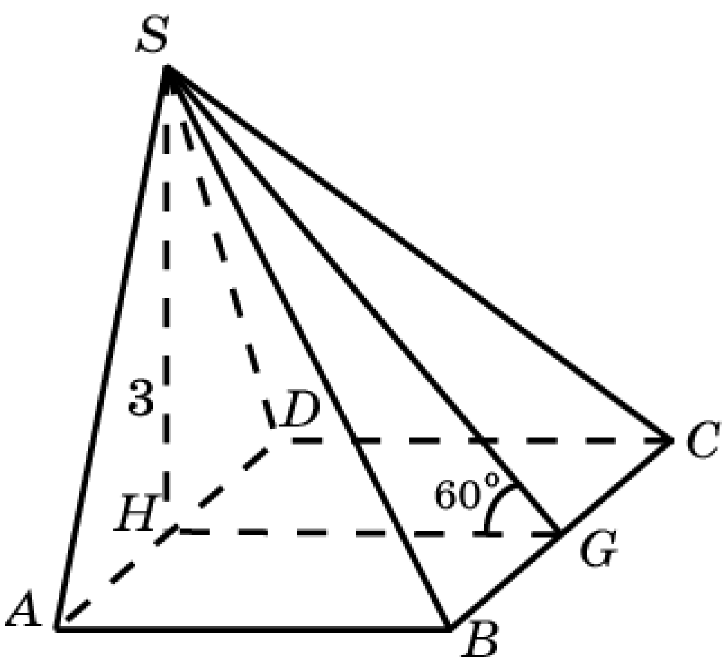
Высота SA равна $\frac{3}{2}$.

Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Упражнение 11

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Высота пирамиды равна 3 см. Найдите объем пирамиды.



Решение. Треугольник *SAD* равносторонний со стороной $2\sqrt{3}$.

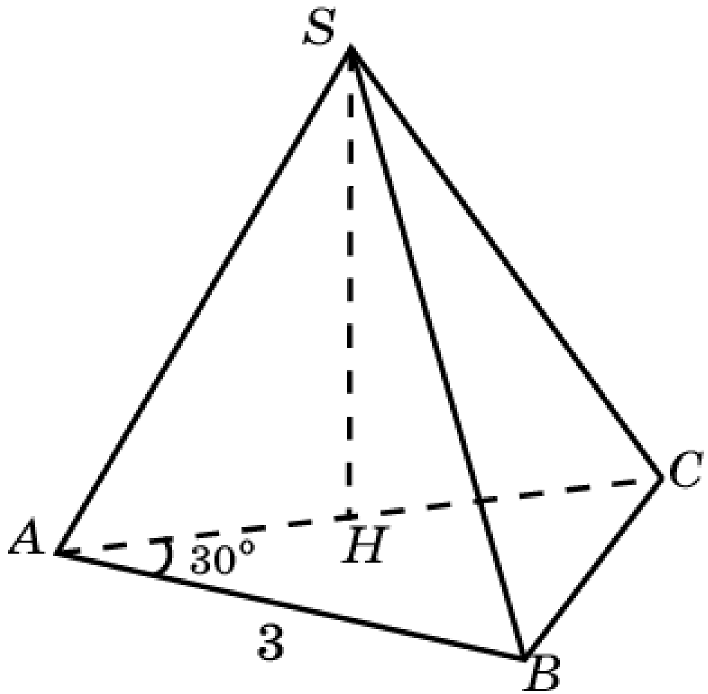
$AB = GH = \sqrt{3}$.

Площадь прямоугольника *ABCD* равна 6. Следовательно, объем пирамиды равен 6.

Ответ: 6.

Упражнение 12

В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен 30°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.



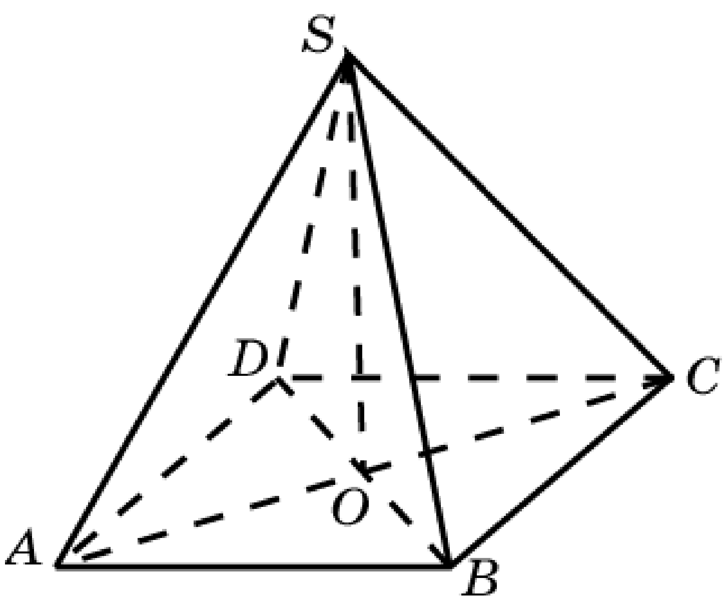
Решение. Площадь треугольника ABC равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Основанием высоты SH служит середина AC. Треугольник SAC равносторонний со стороной, равной $2\sqrt{3}$. Его высота равна 3. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 13

Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом 30°. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды.



Решение. Площадь основания пирамиды равна 120 см^2. Сторона основания равна 13 см.

Высота ромба равна $\frac{120}{13}$ см.

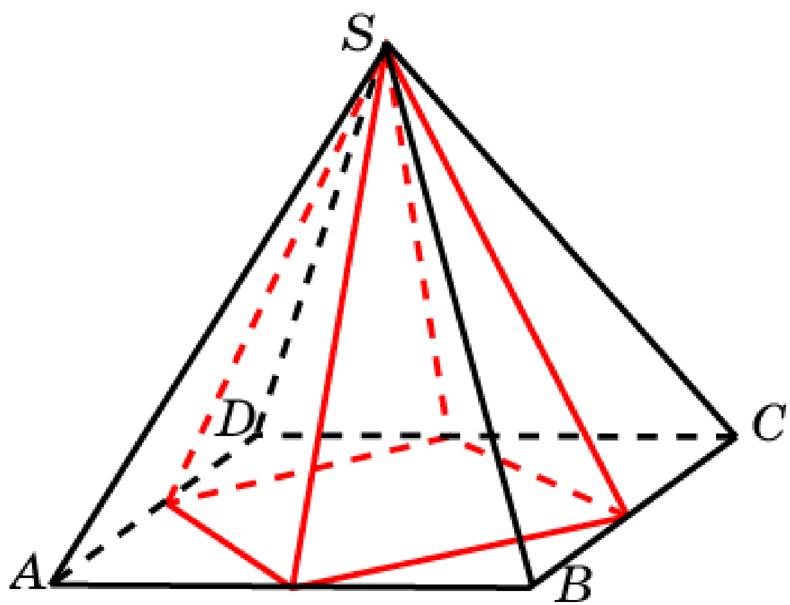
Высота пирамиды равна $\frac{20\sqrt{3}}{13}$ см.

Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{800\sqrt{3}}{13}$ см^3.

Ответ: $\frac{800\sqrt{3}}{13}$ см^3.

Упражнение 14

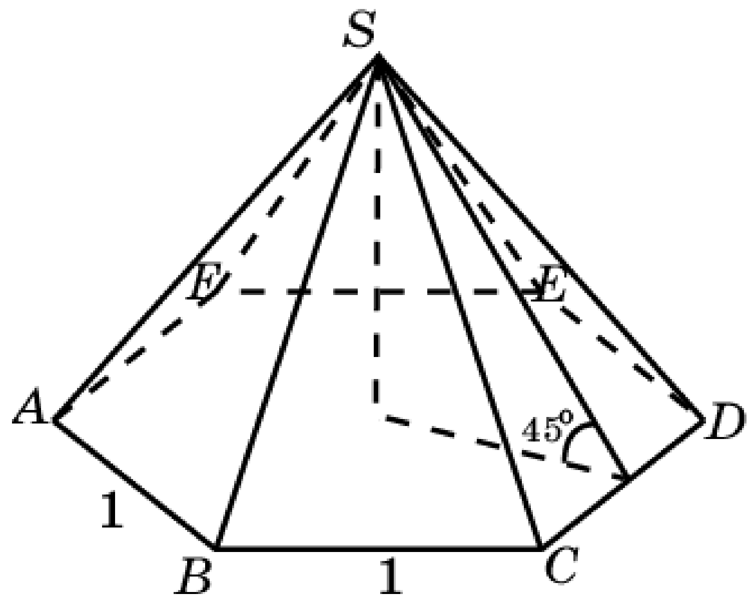
Пирамида, объем которой равен 1, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объем оставшейся части пирамиды.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

Упражнение 15

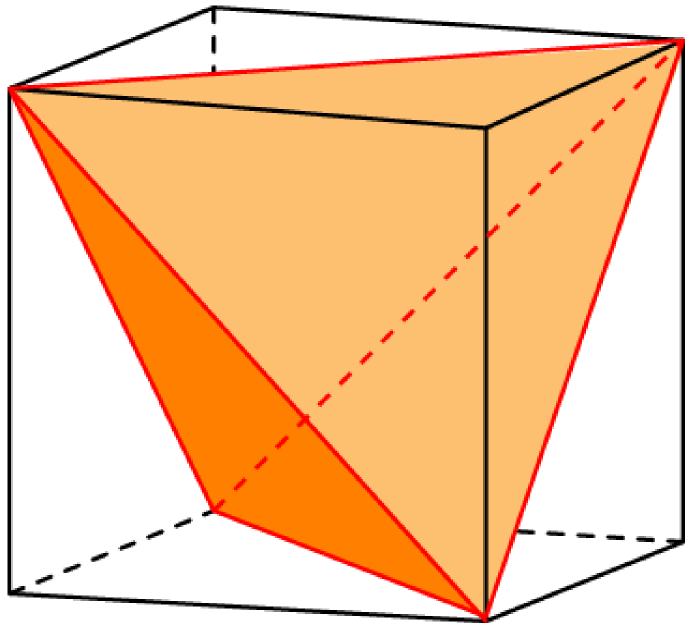
Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды 1, а угол между боковой гранью и основанием 45°. Найдите объем пирамиды.



Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Упражнение 16

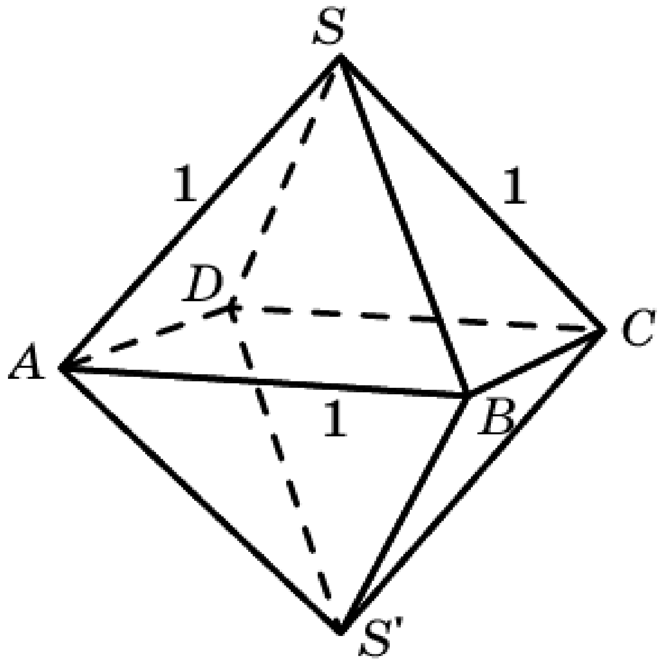
В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объем тетраэдра.



Ответ: $\frac{1}{3}$.

Упражнение 17

Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.

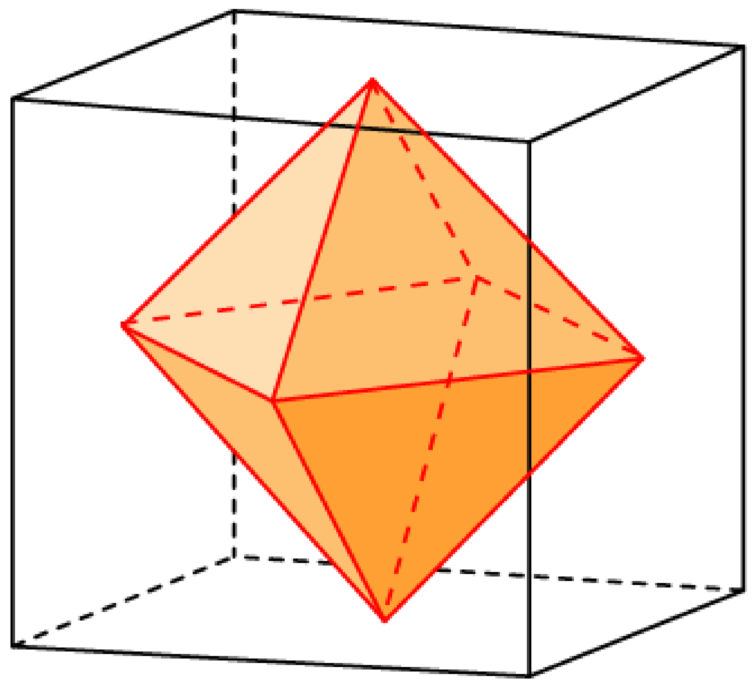


Решение. Октаэдр состоит из двух правильных четырехугольных пирамид со стороной основания 1 и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем октаэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Упражнение 18

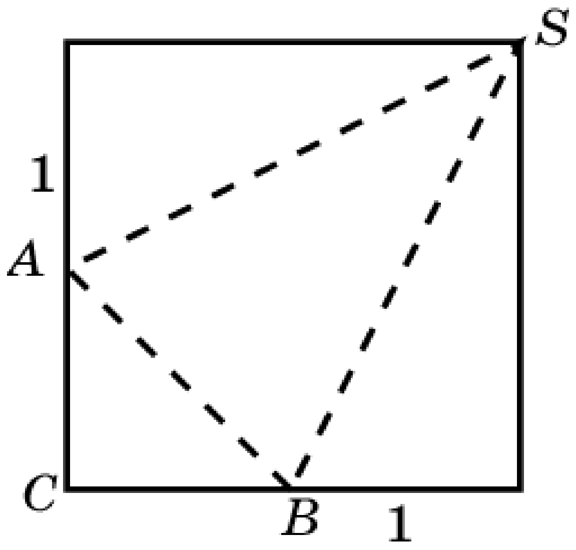
Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.



Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 19

Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной 1. Найдите объем этой пирамиды.

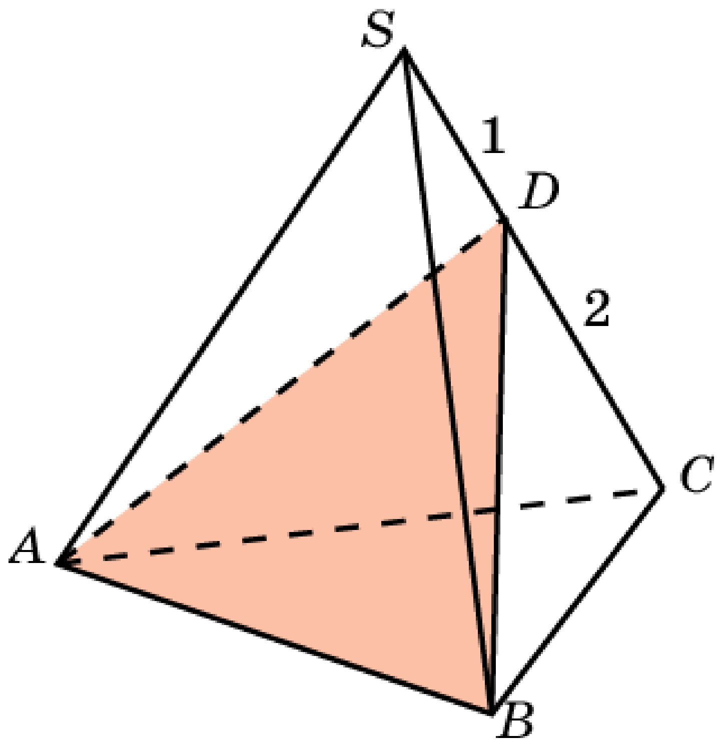


Решение. Основанием пирамиды будет прямоугольный треугольник *ABC* с катетами, равными 0,5. Высота пирамиды будет равна стороне квадрата. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{1}{24}$.

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Упражнение 20

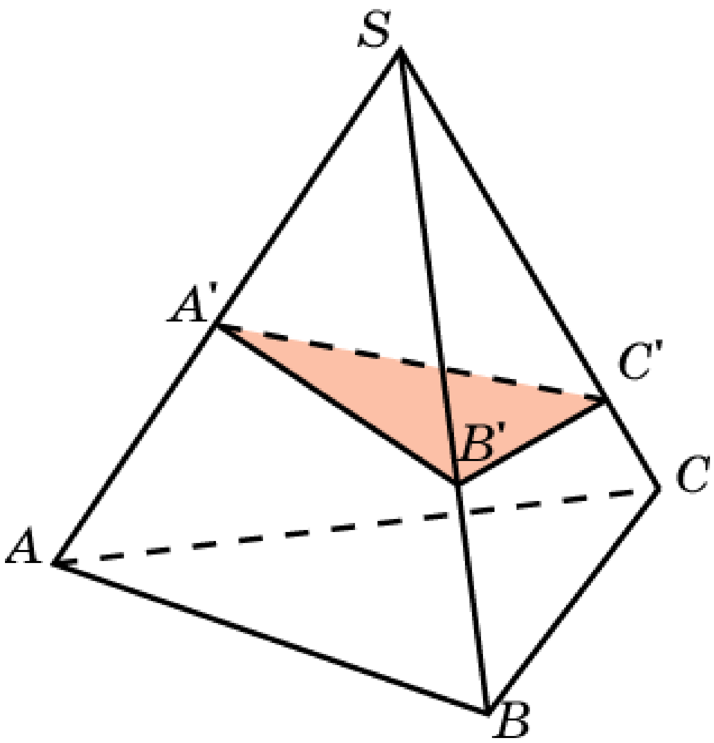
Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и делит противоположное боковое ребро в отношении 1 : 2, считая от вершины. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?



Ответ: 1 : 2.

Упражнение 21

Плоскость пересекает ребра *SA*, *SB*, *SC* треугольной пирамиды *SABC* в точках *A'*, *B'*, *C'* соответственно. Найдите объем пирамиды *SA'B'C'*, если объем исходной пирамиды равен 1 и $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$.

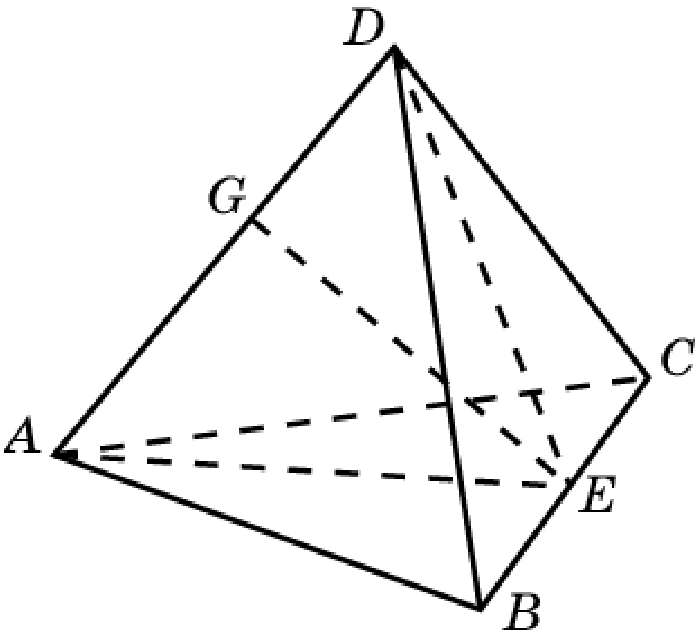


Решение. Площадь треугольника *SA'B'* составляет 1/3 площади треугольника *SAB*. Высота, опущенная из точки *C'* составляет 3/4 высоты, опущенной из вершины *C*. Следовательно, объем пирамиды *SA'B'C'* равен 1/4.

Ответ: 1/4.

Упражнение 22

Два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3. Расстояние между ними равно 2. Найдите объем тетраэдра.

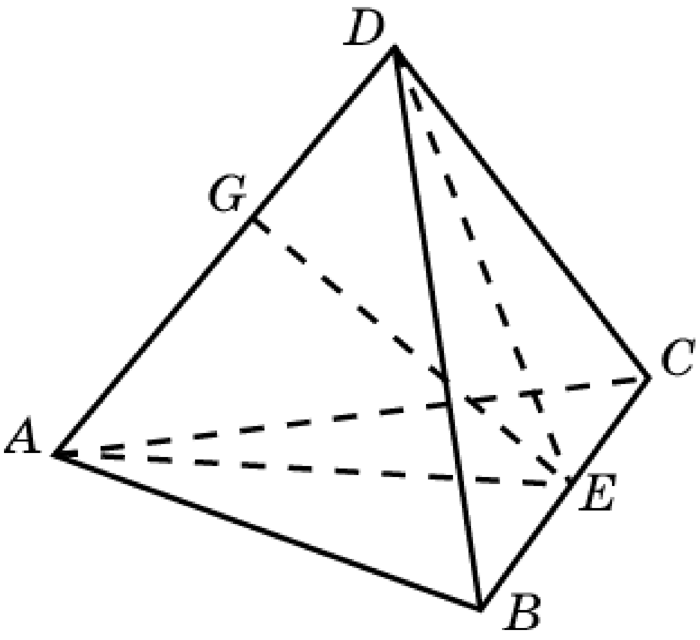


Решение. Пусть AB перпендикулярно CD. Проведем сечение ADE перпендикулярное BC. Площадь треугольника ADE равна 3. Объем пирамиды равен 3.

Ответ: 3.

Упражнение 23

Два противоположных ребра тетраэдра образуют угол 60° и равны 2. Расстояние между ними равно 3. Найдите объем тетраэдра.

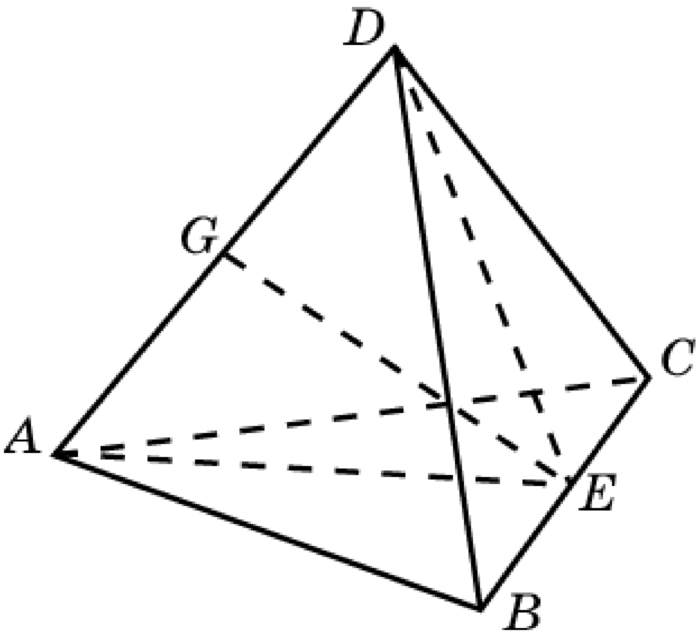


Решение. Пусть угол между AD и BC равен 60°. Проведем общий перпендикуляр EG. Площадь треугольника ADE равна 3. Угол между прямой BC и плоскостью ADE равен 60°. Объем пирамиды равен $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнение 24

Одно ребро тетраэдра равно 6. Все остальные ребра равны 4. Найдите объем тетраэдра.

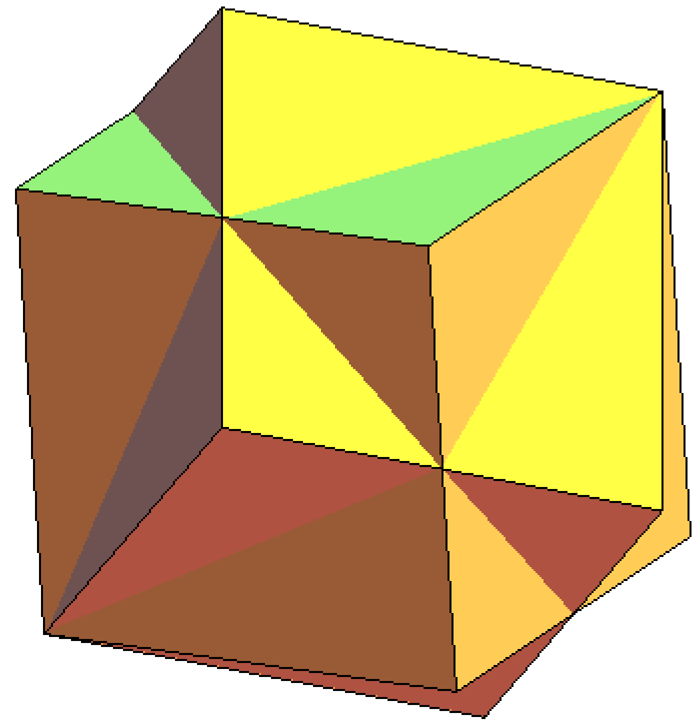


Решение. Пусть $BC = 6$. Обозначим E середину BC. $AE = DE = \sqrt{7}$. Высота EG треугольника ADE равна $\sqrt{3}$. Его площадь равна $2\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Упражнение 25

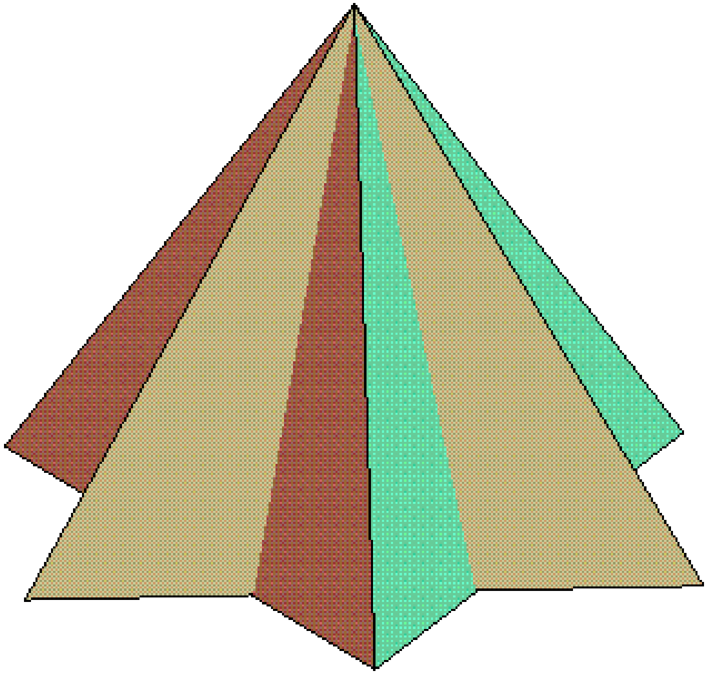
Два куба с ребром *a* имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.



Ответ: Общая часть является правильной 6-й бипирамидой со стороной основания $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и высотой $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Объем этой бипирамиды равен $\frac{3a^3}{4}$.

Упражнение 26

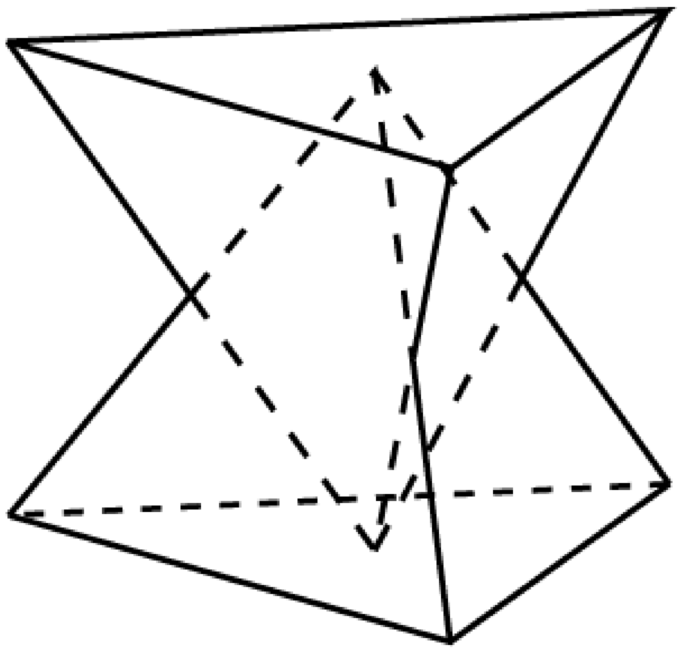
Два правильных тетраэдра с ребрами *a* имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.



Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Упражнение 27

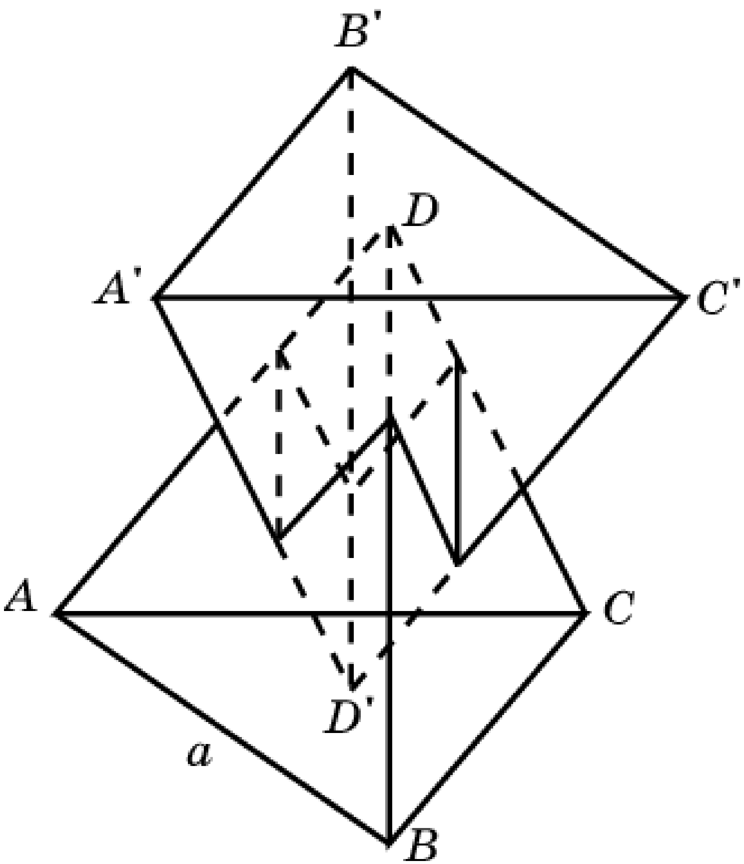
Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



Ответ: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Упражнение 28

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



Решение: Общей частью является параллелепипед, все грани которого – ромбы с острым углом 60°. Ребра параллелепипеда равны $\frac{a}{3}$. Его объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

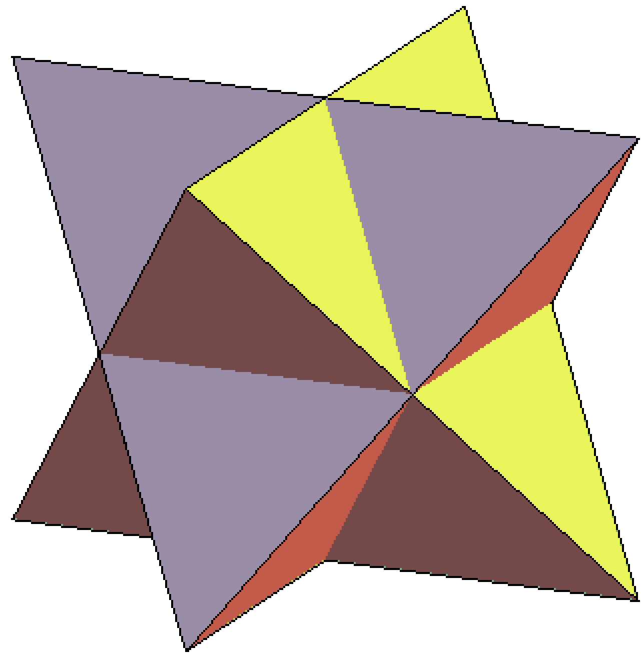
Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

Упражнение 29

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер. Один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Ответ: Общей частью является октаэдр (правильная 4-я бипирамида) с ребром $\frac{a}{2}$.

Его объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.



Упражнение 30

Октаэдр с ребром 1 повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол 45°. Найдите объем общей части исходного октаэдра и повернутого?

Ответ: Общей частью является правильная 8-я бипирамида с площадью основания $2\sqrt{2}-2$ и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ее объем равен $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.