

ОБЪЕМ КОНУСА

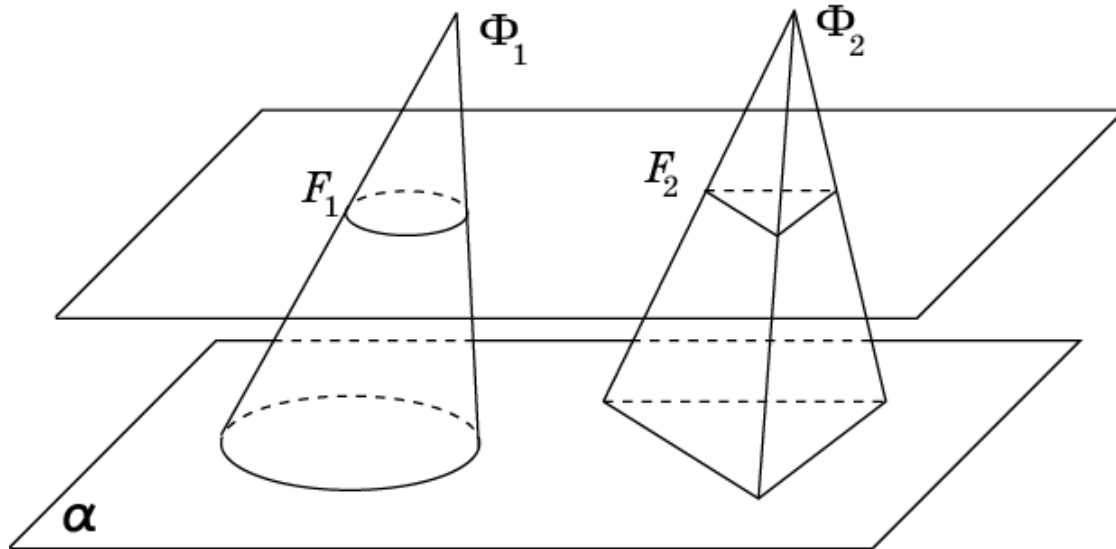
Теорема. Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного конуса с основанием площади S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с теми же площадью основания и высотой. Тогда эти пирамида и конус имеют равные объемы. Но для объема пирамиды имеет место

Формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

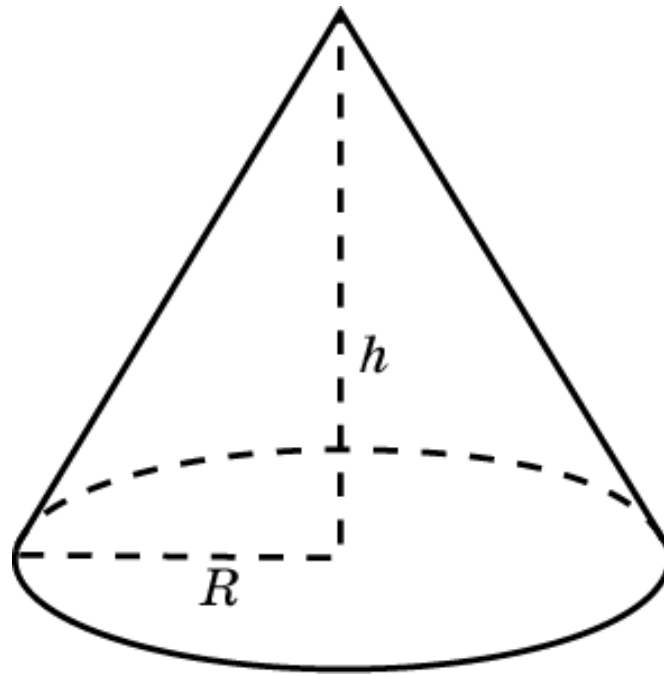
Следовательно, она имеет место и для объема произвольного конуса.



ОБЪЕМ КОНУСА

В частности, для кругового конуса, в основании которого – круг радиуса R , и высота которого равна h , имеет место формула

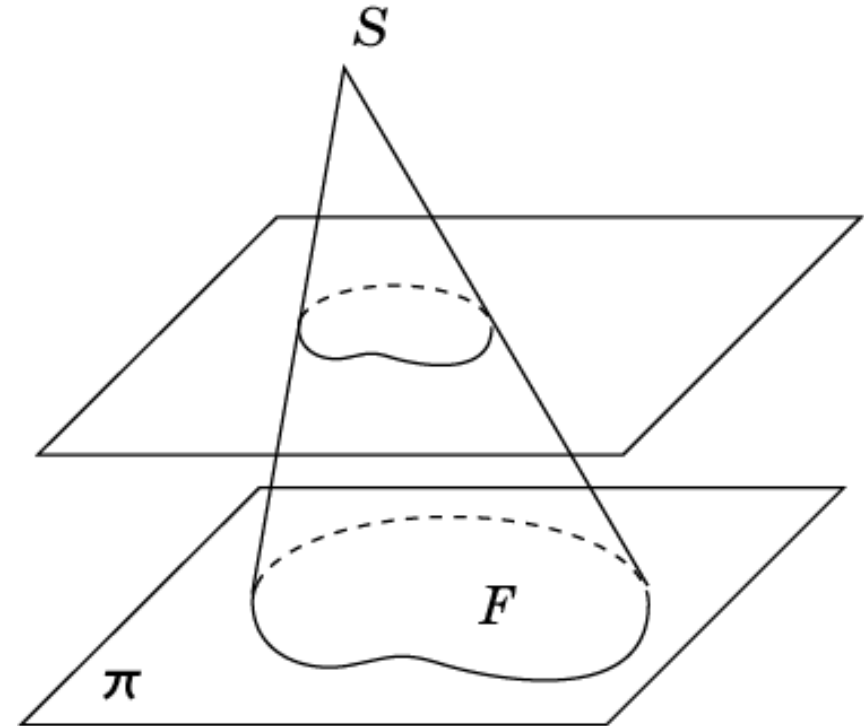
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$



ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом**.

Полученное при этом сечение конуса также называется **основанием усеченного конуса**. Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой усеченного конуса**.



Теорема. Объем усеченного конуса выражается формулой

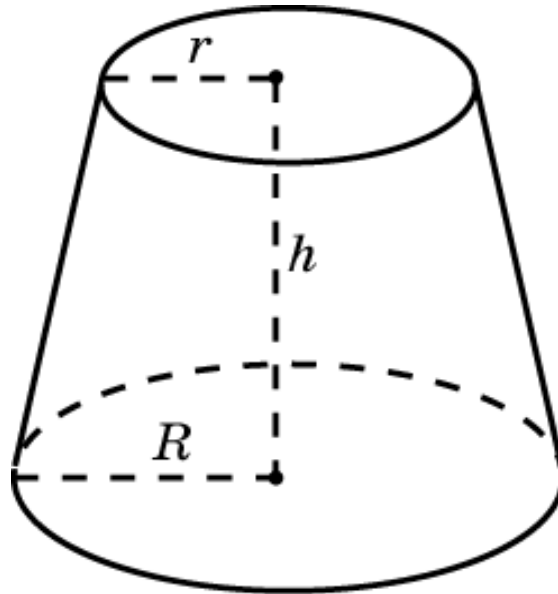
$$V = \frac{1}{3} g (S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$

где S , s - площади оснований, g - высота усеченного конуса.

ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

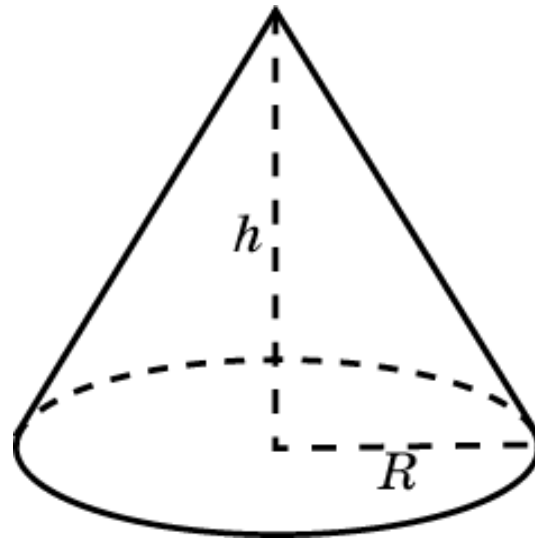
Объем усеченного конуса, основания которого – круги радиусов R и r , а высота равна h , выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R \cdot r + r^2).$$



Упражнение 1

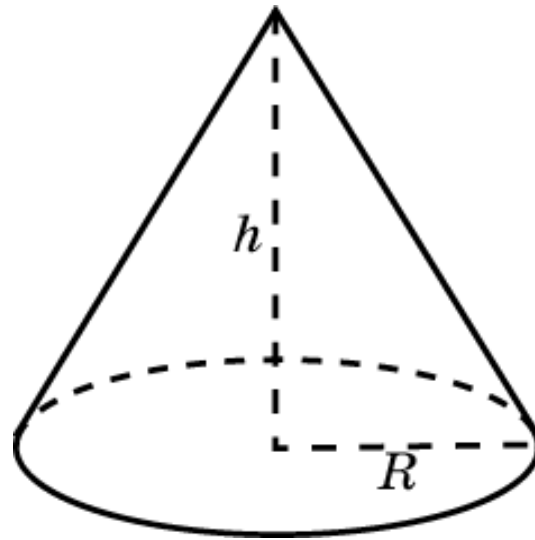
Во сколько раз увеличится объем кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?



Ответ: а) В 3 раза; б) в 4 раза.

Упражнение 2

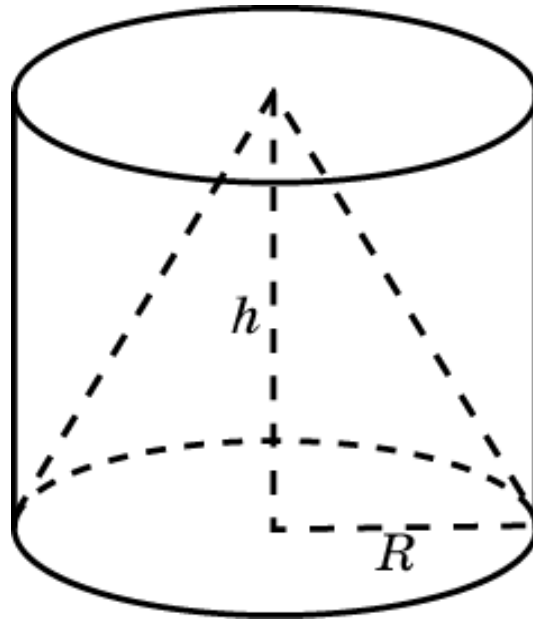
Изменится ли объем кругового конуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?



Ответ: Увеличится в 2 раза.

Упражнение 3

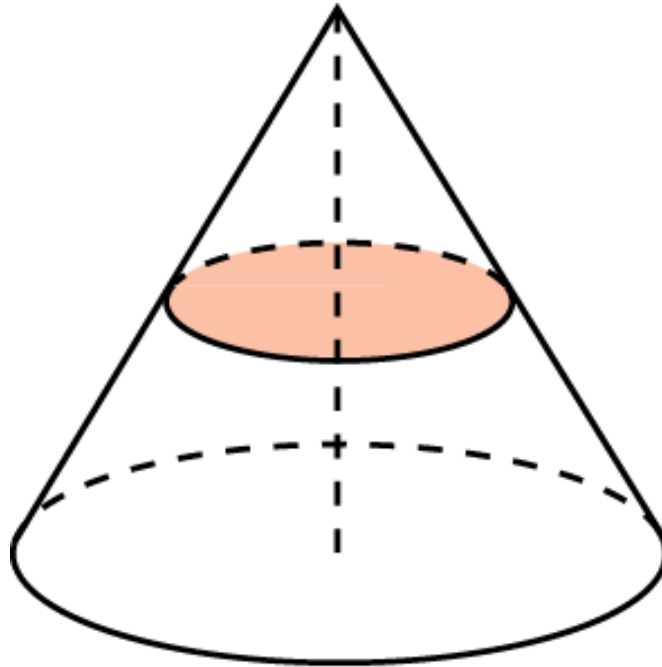
Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 120π см³.



Ответ: 40π см³.

Упражнение 4

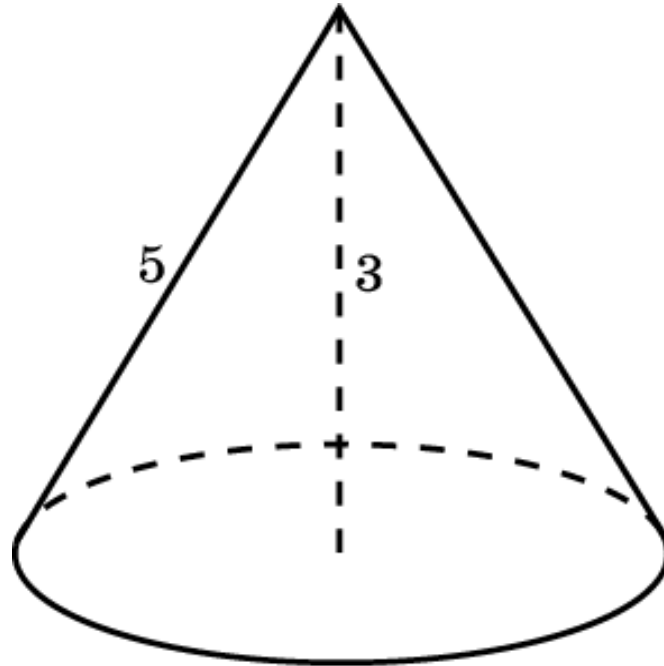
Объем конуса равен 1. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?



Ответ: 1:7.

Упражнение 5

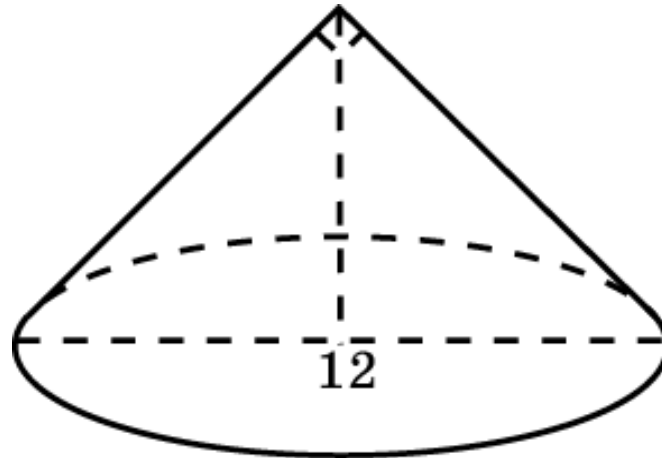
Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.



Ответ: 16π см³.

Упражнение 6

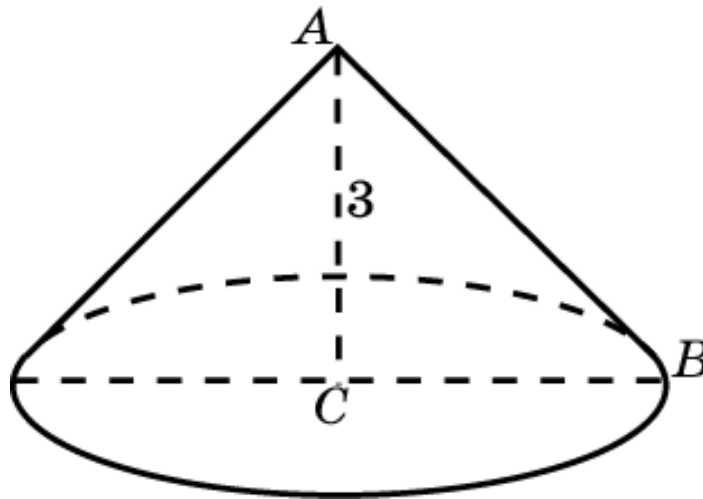
Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения - 90° . Вычислите объем конуса.



Ответ: 72π см³.

Упражнение 7

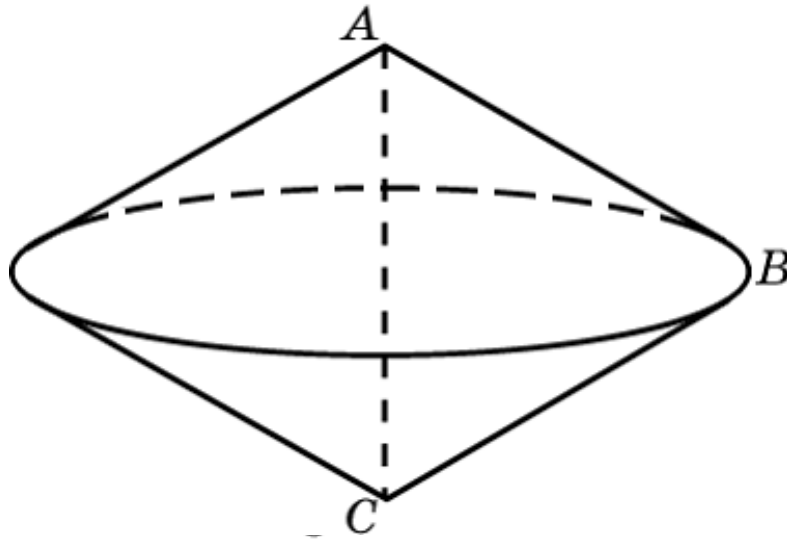
Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.



Ответ: 9π см³.

Упражнение 8

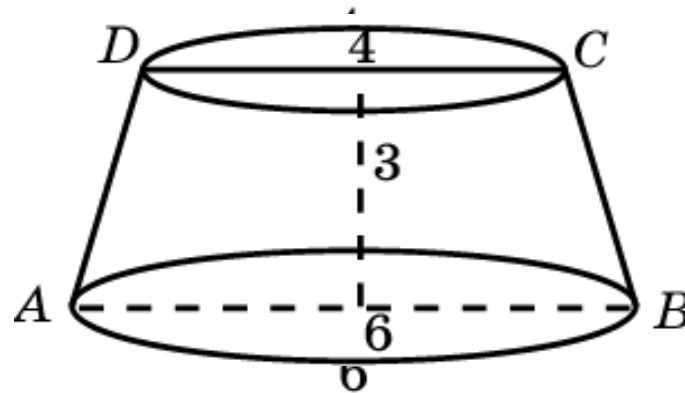
Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны, равной 1. Найдите объем тела вращения.



Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Упражнение 9

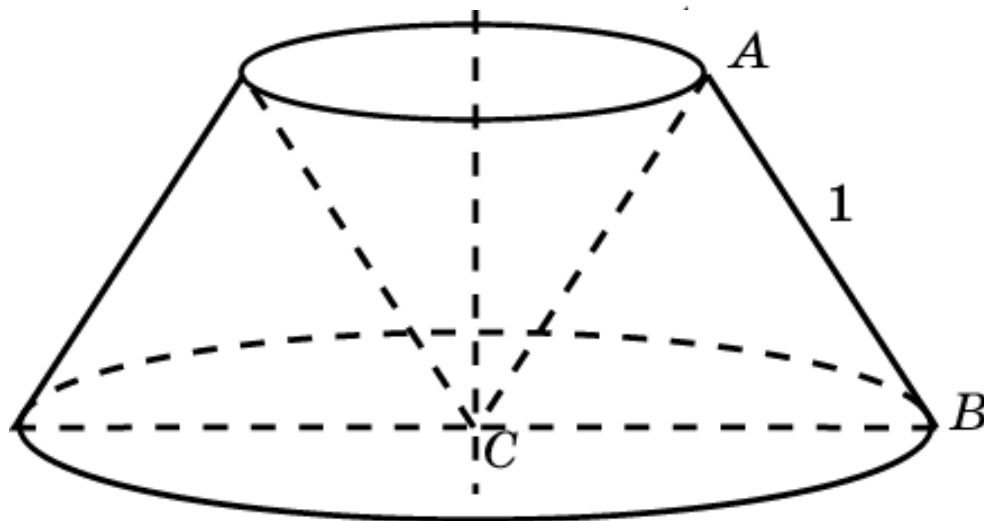
Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота – 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объем тела вращения.



Ответ: 19π см³.

Упражнение 10

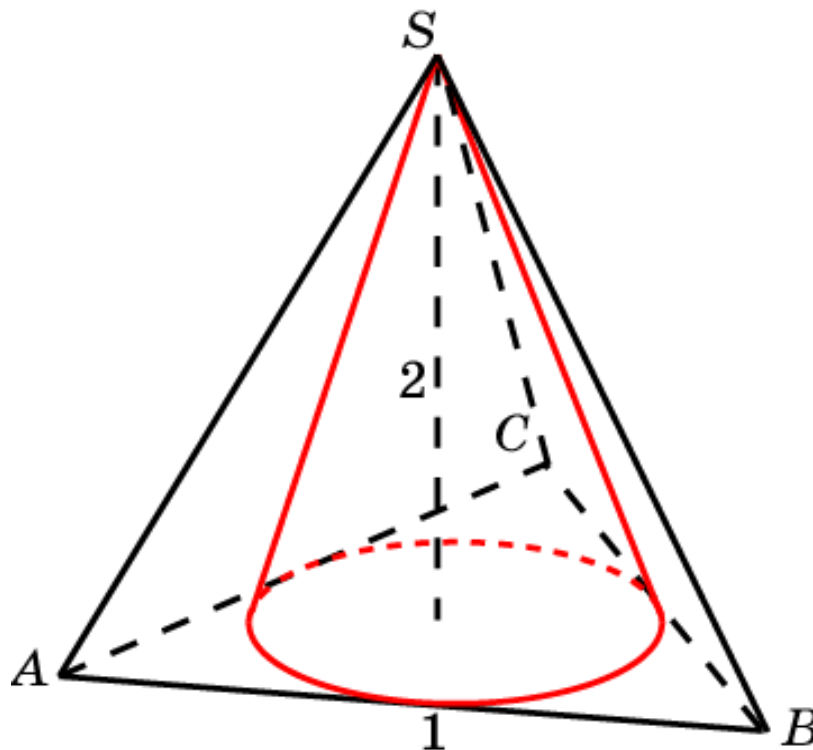
Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объем тела вращения.



Ответ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 11

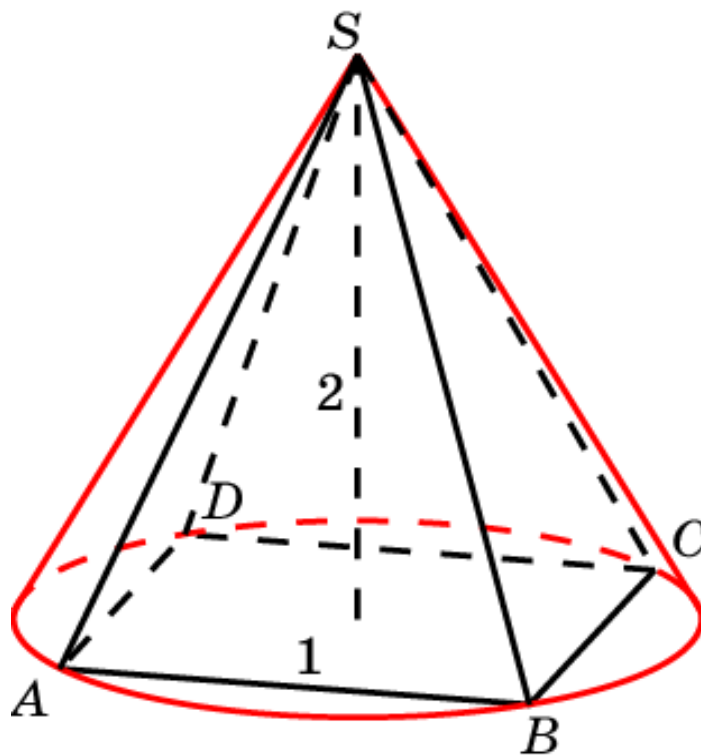
Конус вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания 1 и высотой 2. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{\pi}{18}$.

Упражнение 12

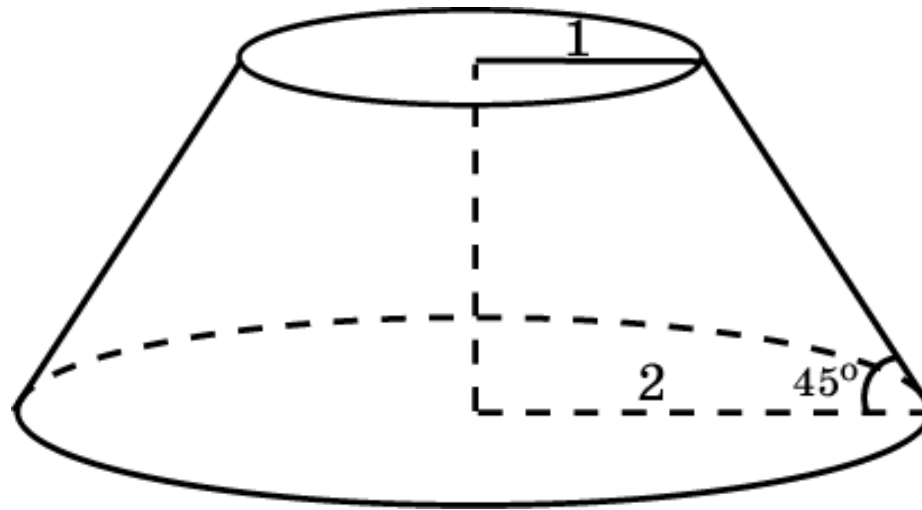
Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h . Найдите его объем.



Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Упражнение 13

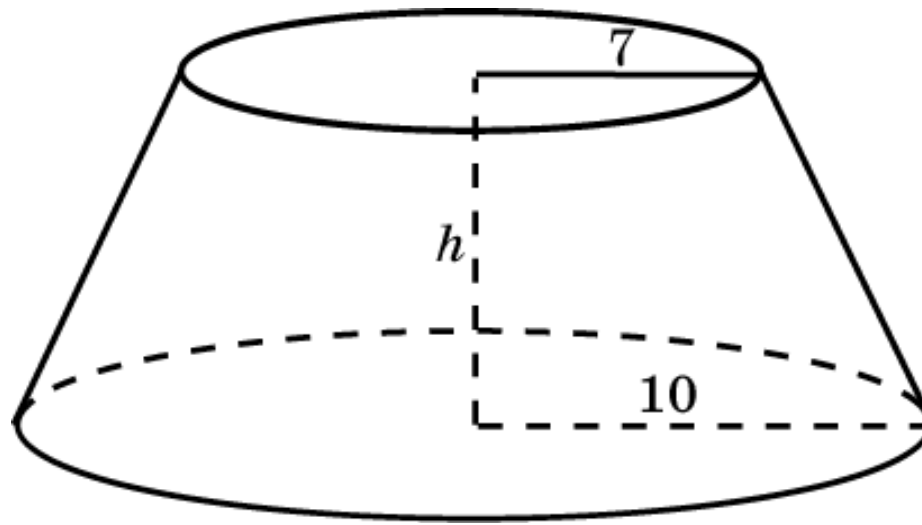
Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 2. Образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите его объем.



Ответ: $\frac{7\pi}{3}$.

Упражнение 14

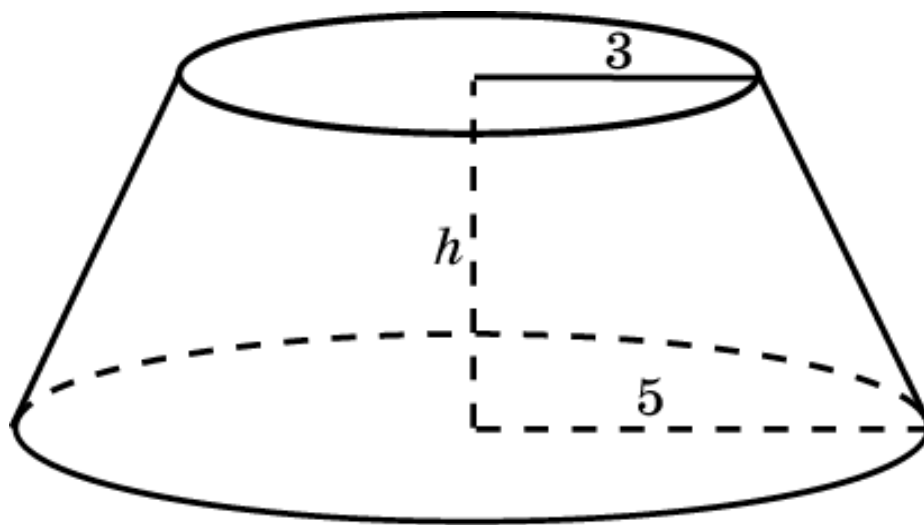
Объем усеченного конуса равен 584π см³, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Найдите высоту усеченного конуса.



Ответ: 8 см.

Упражнение 15

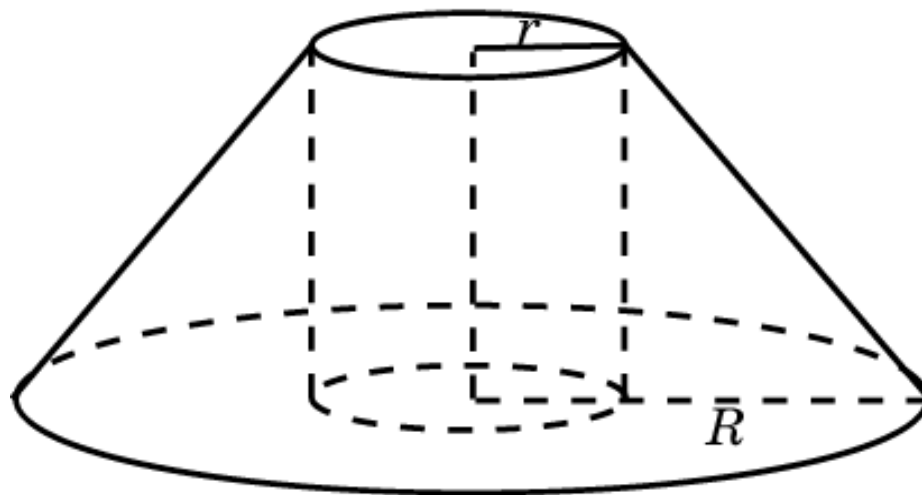
Усеченный конус, у которого радиусы оснований 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?



Ответ: 7 см.

Упражнение 16

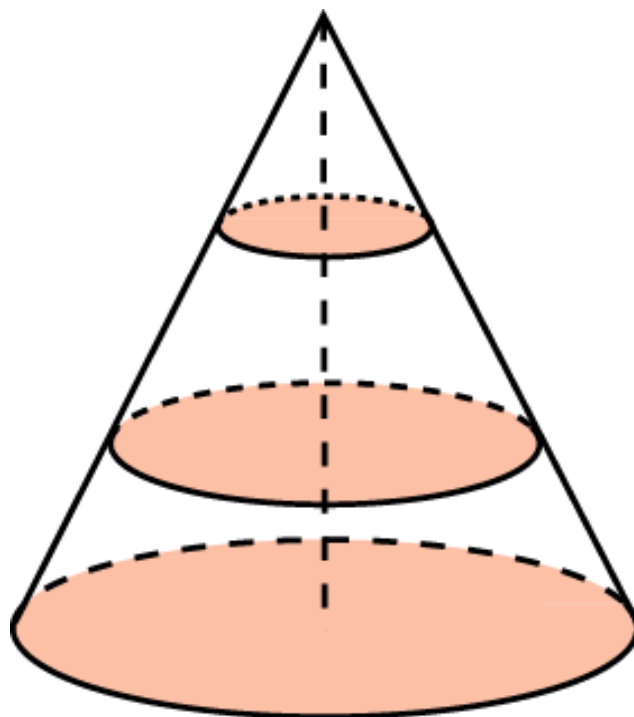
На меньшем основании усеченного конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания. Объем цилиндра составляет седьмую часть объема усеченного конуса. Найдите зависимость между радиусами оснований усеченного конуса.



Ответ: $R = 4r$.

Упражнение 17

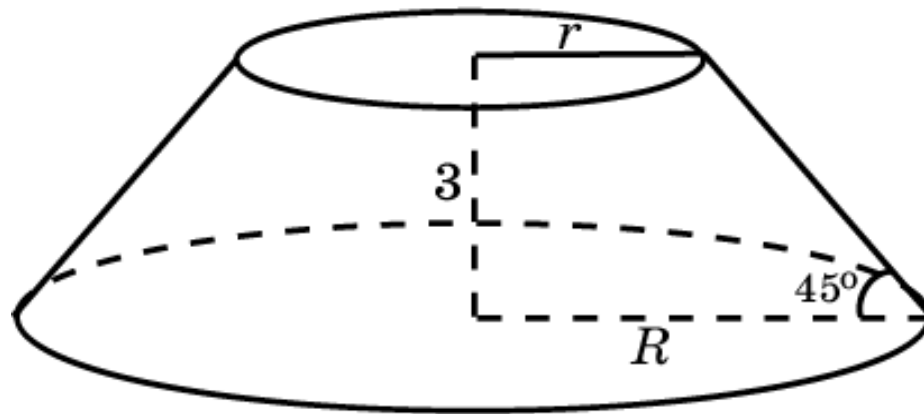
Объем конуса равен 1. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.



Ответ: $\frac{7}{27}$.

Упражнение 18

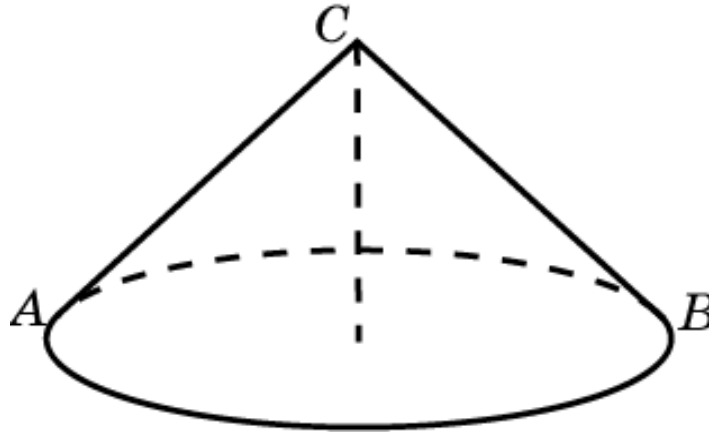
Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите объем.



Ответ: 63π .

Упражнение 19

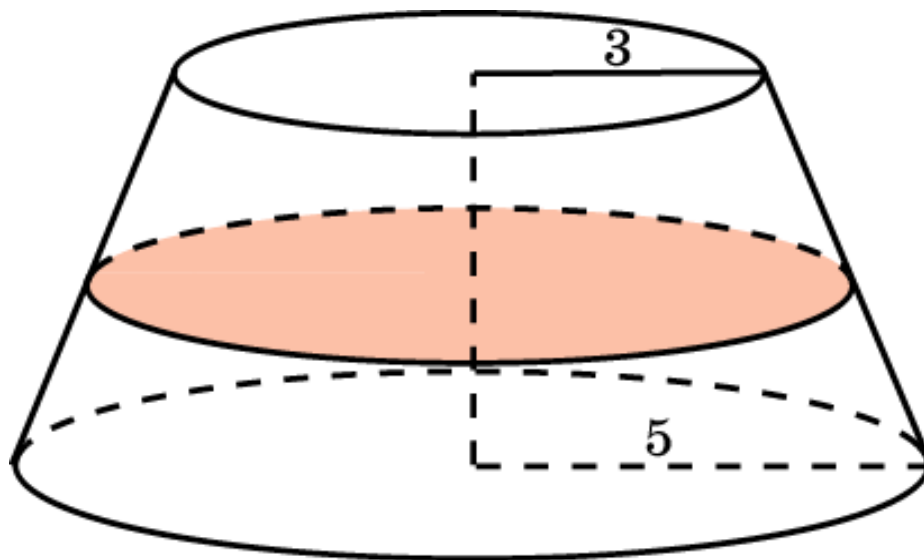
Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площади 9 см^2 . Найдите объем конуса.



Ответ: $9\pi \text{ см}^3$.

Упражнение 20

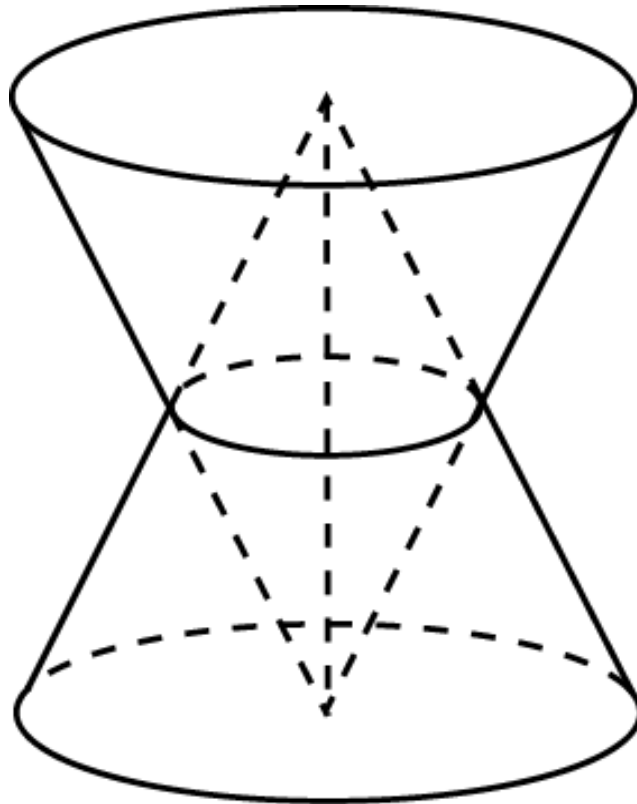
Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 5 см. Найдите отношение объемов частей усеченного конуса, на которые он делится средним сечением.



Ответ: 37:61.

Упражнение 21

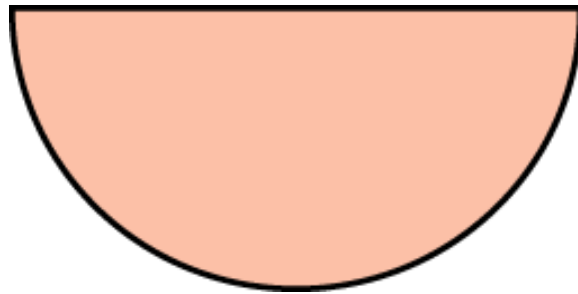
Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Найдите объем их общей части, если объем каждого конуса равен 1.



Ответ: $\frac{1}{4}$.

Упражнение 22

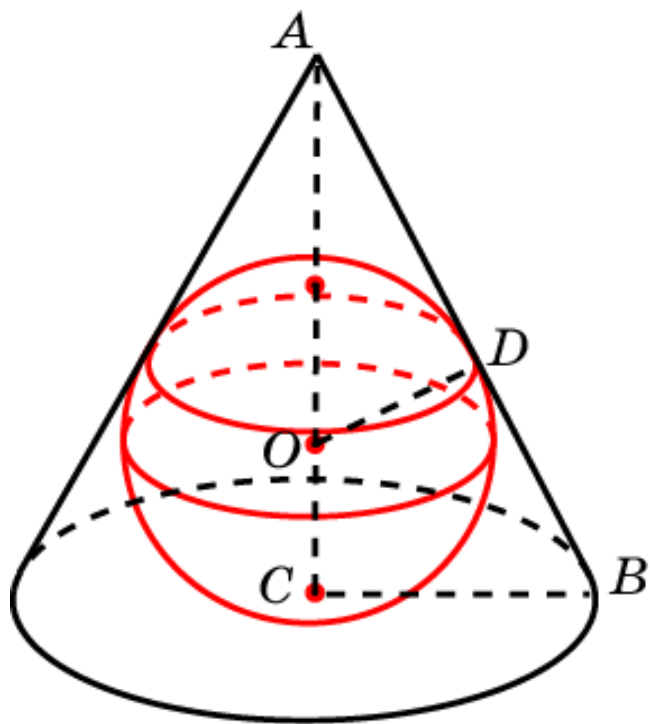
Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг радиуса 2. Найдите объем конуса.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$.

Упражнение 23

В конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар радиуса 1. Найдите объем конуса.



Ответ: $\frac{32\pi}{9}$.

Решение. Треугольники ABC и AOD подобны. Следовательно,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OD}{AD}.$$

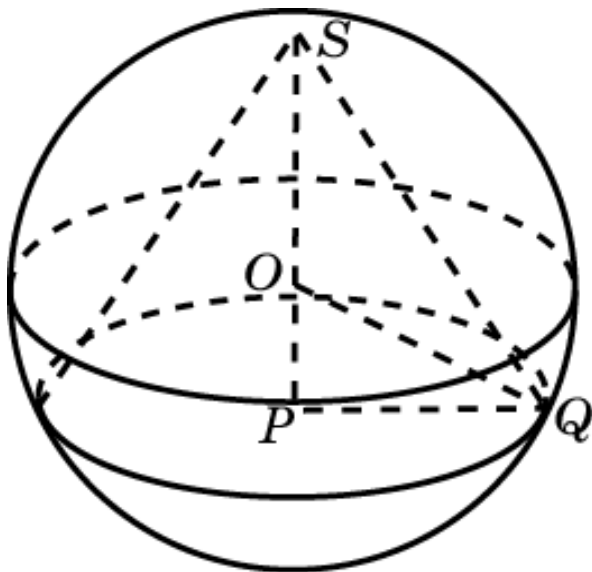
Пусть $AO = x$. Имеем: $BC = 2$, $AC = 1+x$, $OD = 1$, $AD = \sqrt{x^2 - 1}$.

Откуда находим $x = \frac{5}{3}$.

Таким образом, высота конуса равна $\frac{8}{3}$. Объем конуса равен $\frac{32\pi}{9}$.

Упражнение 24

В сферу радиуса 5 вписан конус высоты 8. Найдите объем конуса.



Решение. Пусть O – центр сферы, RQ – радиус основания конуса. В прямоугольном треугольнике OPQ имеем: $OQ = 5$, $OP = 3$. Следовательно, $RQ = 4$. Объем конуса равен $\frac{128\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{128\pi}{3}$.